



TITLE:

列車走行に起因する地盤振動の粘弾性波動論に基づく数値シミュレーションに関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

加藤, 政史

CITATION:

加藤, 政史. 列車走行に起因する地盤振動の粘弾性波動論に基づく数値シミュレーションに関する研究. 京都大学, 2008, 博士(工学)

ISSUE DATE:

2008-03-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k13796>

RIGHT:

列車走行に起因する地盤振動の粘弾性波動論に基づく 数値シミュレーションに関する研究

加藤 政史

2008年3月

博士学位論文

列車走行に起因する地盤振動の粘弾性波動論に基づく
数値シミュレーションに関する研究

京都大学大学院 工学研究科
社会基盤工学専攻 地質工学分野

加藤 政史

2008年3月

Study of the ground vibrations from running trains by numerical
simulations based on viscoelastic wave theories

*Lab. of Engineering Geology,
Dept. of Civil and Earth Resources Engineering,
Kyoto University, Japan*

Masafumi Katou

March, 2008

Abstract

The computational methods are increasingly indispensable in current engineering fields, because the computer technologies have advanced rapidly. In general, engineers have to conduct a theoretical forecast and an experimental verification before a new idea is put to practical use. The computational method is not only the tool for the theoretical forecast but also the alternative of the experimental verification in some cases. A finite difference method (FDM) and a finite element method (FEM) are obviously the most sophisticated methodology. The primal advantage of FDM is its simple coding while that of FEM is flexibility. The purposes of this study are to create alternative FDM- or FEM-based methods for computing the viscoelastic wave equations, to simulate the ground vibration from running trains, and to demonstrate the worth of the developed code in the engineering fields. The ground vibration has a possibility to become environmental problems against the train's speed-up. For further speed-up in the future, it is important to investigate the methodology that can quantitatively reproduce this phenomenon.

First, the viscoelastic wave equations are derived. From the view of coding, this derivation is composed of alternative definition of variables and arrangement of equations.

Second, the two-dimensional elastic wave equations are expanded to computational scheme. The author originally proposes DEFGM (Decomposed Element Free Galerkin Method). DEFGM is composed of two ideas. One is that its calculation scheme computes the internal-stresses at each time step without computing the stiffness matrix. Another is to use the shape function evaluated by the moving least squares from the Element Free Galerkin Method (EFGM). The reason to propose DEFGM is to enhance the accuracy of FEM even in the low-order degrees of the spatial interpolation. The main discussion is the comparison between DEFGM and FDM4 (Finite Difference Method with 4th order accuracy in space).

In the test by using analytical solution of the PS reflection wave, the accuracy of FDM4 was a little better than that of DEFGM. When PS reflection waves were used for the comparison, we found that the numerical accuracy of FDM4 was a little better than that of DEFGM. This is because the accuracy in space of FDM4 is fourth-order while that of our DEFGM is third-order. Therefore, FDM4 is better than DEFGM when we simulate infinite space since FDM4 consumes less CPU time than DEFGM. However, when we simulate Lamb's problem with 8 nodal spaces for the shortest S-wavelength, DEFGM provides an accurate Rayleigh waveform for a distance at least equal to 50 wavelengths while FDM4 for 5 wavelengths. This is because our FDM4 adopts second-order accuracy in space near the free surface. In addition, DEFGM with a 1 m nodal spacing is more accurate than FDM4 with a 0.5 m grid spacing. In this comparison, the CPU time of DEFGM is faster than that of FDM4. Finally, we compared the results from some weight

functions. Although a weight function frequently used in past literatures performs less accurate than expected, the proposed combination of base vector and weight function dramatically improved the accuracy of EFGM. Also it is found that a specific DEFGM performs better in the accuracy than standard FEM.

Third, a three-dimensional viscoelastic finite difference method (FDM) was adopted to study the mechanism of ground vibrations induced by a high-speed train. Time-series data of the forces acting on the railroad were observed from the wheels of a running Shinkansen train and were used to develop a realistic source function as an input to numerical simulations for a single wheel. The measurement of forces on the wheels effectively provides unlimited low-frequency components. A 3D numerical model comprising an embankment of the railroad was designed to mimic a test field site using the borehole logging data. Simple analytical discussions concluded that a rail length of 120 m and a grid spacing of 0.25 m were acceptable for stable FDM simulations without numerical dispersion. The simulated ground vibration was compared with the observed vibrations at the test site. The simulated ground vibrations closely resemble the observed ones. At the test site, material attenuation (Q) is not observed experimentally, however, the best match with field data is realized by assuming $Q = 5, 6, 7.5, 15, 25$ and 50 .

Finally, by using three-dimensional DEFGM and FEM, a complex structural problem is evaluated. The accuracy of the FEM is evaluated by three tests. FEM is compared to the analytical solution for Lamb's problem and the semi-analytical solutions for layered elastic or viscoelastic media. Viscoelastic wave equations are derived from three relaxation mechanisms. Especially, FEM and the analytical solution for Lamb's problem showed almost perfect convergence. Therefore, it is concluded that FEM produces quite accurate waveforms. This conclusion supports the accuracy of FEM in viscoelastic case. Moreover, it performs effective CPU time reduction by parallel computing.

A connecting part in elevated bridge, for some cases, is reinforced by steel beams. Its sub-effect for the ground vibration was evaluated by using a combining theory between beam element and DEFGM element. Also, the buried sheet pile was evaluated. The results could affirmatively explain the result in the past experimental researches. Thus, it was demonstrated that these two constructions supply effective reduction of ground vibration level.

In summary, the frameworks to simulate the ground vibration from running trains were successfully developed. This remark is fundamentally supported by various accuracy and stability tests. Especially, this paper presents a stability condition for finiteness and discreteness of railroad. Also, it presents a matching condition between beam element and DEFGM element. It is important that the simulations are conducted after these validating processes.

It depends on the situation which FDM or FEM should be selected. It was found that

accuracy is even as long as FDM and FEM solve a homogeneous problem by this research. When a basic mechanism of the phenomenon clarifies, FDM is appropriate because of its simple coding. On the other hand, when we evaluate complex conditions such as elevated bridge or sheet pile constructions, FEM is appropriate. In case of FEM, the treatments of the combination with beam element or the coordinate transformation are more elaborate than in the case of FDM.

Future study should aim to consider the mechanisms such as the consolidation, the anisotropy, the acoustic emission and the slips between a concrete and natural ground. For such specific problems, the new methodologies may be more appropriate than FDM- or FEM-based methodologies. For the new methodologies, it may be impossible to obtain analytical solutions. However, this paper demonstrated that FDM and FEM supply quite accurate resolutions. Therefore, the new methodologies can be investigated by comparing to FDM or FEM.

要旨

近年計算機技術が急速に進歩したため、あらゆる技術的分野において、数値計算は不可欠なものとなりつつある。新しい技術は、理論的予測と実験的検証を経て実用化される。数値計算は、この理論的予測のための道具というばかりでなく、実験的検証の代替手段になる場合もある。差分法 (FDM: Finite Difference Method) と有限要素法 (FEM: Finite Element Method) がそれぞれプログラミングの容易さと汎用性から、最も利用されている数値計算手法であるのは明らかである。本研究は、粘弾性波動論において FDM と FEM を中心とした数値解の高精度化と、列車走行に起因する地盤振動現象の再現、さらには当分野での工学的応用を目指したものである。一般に地盤振動は、環境問題と成り得る一方で、列車の高速化も望まれている。ゆえに、将来のさらなる高速化のために、定量的にこの現象について再現することができる方法論を発見することが重要である。

まず、粘弾性波動方程式を導出する。ここでの導出方法は後の数値計算スキームへの展開を念頭に置き、変数の定義等が過去の文献よりも簡潔に整理されている。

粘弾性波動方程式のスキームへの展開は、弾性波動方程式から容易に導くことができる。ゆえに、弾性波動方程式を、FDM と FEM による 2 次元の数値計算スキームを詳述する。本論文では、FEM については、エレメントフリーガラキン法の移動最小二乗法から求める内挿関数を用い、さらに剛性マトリクスを構成せずに各タイムステップごとに応力を評価する計算スキームである DEFGM (Decomposed Element Free Galerkin Method) を提案する。そしてこの手法と FDM4 (Finite Difference Method with 4th order accuracy in space) との比較を中心に議論を進める。DEFGM を考案した理由は、空間内挿の次数を必要以上に上げることなく精度を向上させるためである。

PS 反射波による比較検討では、FDM4 の精度が DEFGM のものより少し良かった。この理由は、DEFGM の空間精度が 3 次であるのに対し、FDM4 の空間精度が 4 次だった点にあると考えられる。一方、最短波長に対して 8 グリッドの条件で行ったレイリー波の合成テストにおいては、グリッド分散なしに正しいレイリー波が合成できるのは、FDM4 では 5 波長 (Ricker wavelet の中心周波数に対する) であったのに対し、DEFGM では 50 波長以上を伝播した。この理由としては、FDM4 が自由表面の近くが空間精度 2 次であったためと考えられる。このように、計算精度を計算時間との両面から評価した結果、自由表面を含まないモデルでは FDM4 が、一方、自由表面を含むモデルでは DEFGM が効果的なシミュレーション手法であるということがわかった。また、DEFGM において、基底ベクトルと重み関数を変化させながら比較検討を行った。過去の研究に示された基底ベクトルと重み関数の組み合わせは、我々の問題においては期待されるほどの精度は得られなかった。しかし、本研究において著者が提案した新たな基底ベクトルと重み関数の組み合わせは DEFGM の精度を劇的に向上させた。さらには、通常の FEM を上回る精度を与える組み合わせを見いだすことができた。また、以上の成果は、空間内挿の次数を必要以上に上げることなく実用上十分な

計算精度を得たという点で画期的といえる。

次に、上記において提案した手法を新幹線の走行に起因する地盤振動に適用し、実世界での波動現象の再現を試みた。この際、新幹線の車両の挙動分析や安全点検のために計測される走行中の車輪に掛かる力を直接シミュレーションにおける入力として利用した。この利点は、入力が既知であるため、波動場を再構成する際、伝達系の波動論の妥当性に絞った議論ができることである。まずフィールドサイトの速度検層記録と、周辺地域での盛土の物性値を文献等から整理した。そしてそのサイトで列車から到来する地盤振動の時系列、振幅スペクトル、FK スペクトルを観測した。このようにして得られた入力と地盤のパラメータを入力し、FDM シミュレーションを行った。値が確定していないパラメータである粘性 Q 値を 5, 6, 7.5, 15, 25, 50 の 6 通りで別々に計算を行った。シミュレーション結果の振幅スペクトルを現場記録と比較したところ、 $Q = 7.5$ の設定において、シミュレーション結果は、フィールドで記録された波動の時系列と非常に良い一致を示した。この Q 値の範囲は、過去の文献等から妥当であると判断できる。また、シミュレーション結果を FK スペクトル解析することで、現場記録にドップラー効果が含まれることが明らかになった。列車が盛土という連続的な構造の上を走行していることと、新幹線という極めて重量バランスに優れた列車を対象としているという 2 つの理由から、あらゆる車軸からの応答は同じであるということと、場所によっていくらか列車の重量から大小する変化分のみが地面振動を引き起こすという 2 つの仮定を設けた。これらは、計測方法の限界等を補うという意味もある。シミュレーション結果は、地面振動現象を十分説明しているといえ、これらの仮定は肯定される。

最後に、3 次元 DEFGM と FEM を用いて複雑な構造問題を評価した。まず、3 次元 FEM の精度を弾性体半無限空間の解析解、弾性体 2 層無限空間の準解析解、粘弾性体 2 層無限空間の準解析解の 3 つのモデルおよび別解との比較により評価を行った。このように精度評価を 3 通りに分けた理由は、解析解も準解析解も数値積分等を含む近似解法であるからだ。シミュレーションの結果、弾性半無限空間の解析解と極めて良い一致を見せ、他の準解析解とはわずかな誤差があった。明らかに解析解は、準解析解よりも厳密解に近いと、粘性を含めた FEM の精度は極めて良いと結論付けることができる。さらに、並列計算によってプロセッサ台数以上の高速化が望めることもわかった。

以上のような精度評価をもとに、高架橋連結部に取り付けた補強鋼が地盤振動に与える影響の評価を行った。これには、梁理論と 3 次元 DEFGM の結合理論を導入した、また、鋼矢板による地中防振壁の評価を行った。これらの計算結果は、過去の実験的研究の成果を理論的に説明できる結果といえる。

本論文全体を通して留意した点は、利用する数値計算手法の精度や特徴を十分に確認した上で、地盤振動現象を解明した点である。特に計算精度は、解析解との比較だけでなく、列車走行による振動問題のように線路長を有限に打ち切ることの妥当性や、DEFGM と梁理論の結合モデルを全 DEFGM モデルとの比較によって示せた点は

重要といえる。このように数値計算手法に対して、十分な精度評価を行ったため、列車走行に起因する地盤振動をある程度の範囲で解明できたといえる。

今回の研究によって、FDM と FEM は均質な問題を解く限り、精度は互角であることがわかった。従って、これらは用途によって使い分けるのが良い。FDM は、現象の基本的メカニズムの解明する際に適切である。なぜなら、プログラミングが簡潔で計算量が少ないためである。一方、複雑な構造問題に対して扱いが容易な FEM は、高架橋や防振工事といった人工構造物が存在する場合の動的問題を評価する際に適切である。

波動現象の分野に限らず、さまざまな技術的分野において数値計算が非常に有効なツールであることは確かである。しかしながら、工学的な応用を考えた時に、数値計算が信用に足る値を提供しているかどうかには、本論文で示したような精緻な議論が必要であることを強調したい。本論文に示したいいくつかの応用例においても、今後より詳細な考察と考慮が望まれるメカニズムの存在が考えられる。例えば、地盤の圧縮性やコンクリートと地盤の間のすべり、異方性等の問題である。今後は、動的問題においても、このような本研究では無視されていたメカニズムの導入や、さらには FDM や FEM の枠組みを超えた新規手法の提案を目指したい。

目次

第1章	緒言	1
第2章	弾性/粘弾性波動方程式の導出	3
2.1	弾性体の構成則	4
2.2	運動方程式	5
2.3	弾性波動方程式	7
2.3.1	2次偏微分方程式型	7
2.3.2	2組の1次偏微分方程式型	7
2.4	粘弾性体の構成則	9
2.4.1	標準線形固体モデル (Standard Liner Solids Model)	9
2.4.2	SLSM の連続体への展開	11
2.4.3	Q 値の設計 ($\tau_{\sigma l}$, τ_l^p , τ_l^s の導出)	14
2.4.4	地震波動伝播速度の設計 (M_R^p , M_R^s の導出)	17
2.4.5	Blanch 法	18
第3章	2次元差分法と有限要素法の比較	25
3.1	はじめに	25
3.2	差分法 (FDM: Finite Difference Method)	27
3.2.1	スタガード格子	27
3.2.2	自由境界スキーム 1; Image method	29
3.2.3	自由境界スキーム 2; Vacuum method	30
3.3	有限要素法 (FEM: Finite Element Method)	31
3.3.1	内挿関数	31
3.3.2	構成則 (フックの法則) による応力のアップデートスキーム	35
3.3.3	ガラーキン法	36
3.3.4	運動方程式による粒子速度のアップデートスキーム	38
3.4	エレメントフリーガラーキン法	45
3.4.1	エレメントフリーガラーキン法の内挿関数	45
3.4.2	DEFGM(Decomposed Element Free Galerkin Method)	48
3.5	吸収境界条件	49
3.5.1	Cerjan method	49
3.5.2	PML(Perfectly Matched Layer)	49
3.6	計算結果の比較	57
3.6.1	安定条件	57
3.6.2	PS 反射波	57
3.6.3	レイリー波	59
3.6.4	重み関数の比較	62

3.6.5	計算時間	67
3.7	まとめ	68
第4章	列車走行に起因する地盤振動のFDMシミュレーション	71
4.1	はじめに	71
4.2	観測される地盤振動と車輪にかかる力	73
4.2.1	PS 検層と経験的な弾性体パラメータ	73
4.2.2	地盤振動記録	77
4.2.3	車輪にかかる力	83
4.3	数値計算における移動振源の安定条件	85
4.3.1	線路長の安定条件	85
4.3.2	グリッド間隔の安定条件	86
4.4	シミュレーションに用いるパラメータの決定	91
4.4.1	移動振源の与え方	91
4.4.2	FDM で設定する地盤のパラメータ	92
4.5	シミュレーション結果	95
4.5.1	スナップショット	95
4.5.2	インライン応答	98
4.5.3	Q 値の違いによる振幅の変化	98
4.6	まとめ	103
第5章	3次元FEM・DEFGMの応用	105
5.1	はじめに	105
5.2	3次元FEMの並列アルゴリズムと計算精度	106
5.2.1	並列アルゴリズム	106
5.2.2	計算精度	108
5.3	高架橋連結部の補強が地盤振動に与える影響の評価	113
5.3.1	計算モデルと移動振源	113
5.3.2	シミュレーション結果	116
5.4	鋼矢板の振動減衰効果の評価	119
5.4.1	計算モデルと移動振源	119
5.4.2	計算結果	120
5.5	まとめ	127
第6章	結言	129
付録A	コンボリューションの性質	133

付 録 B	梁理論と DEFGM の結合理論	135
B.1	梁理論の計算方法	135
B.2	3 次元弾性体と梁理論の比較	138
B.3	DEFGM と梁理論の適合条件	138
B.4	DEFGM と混合計算の比較	140
	参考文献	145

目次

2.1	A small volume for introducing equations of motion	5
2.2	Traction forces on a small volume	6
2.3	Standard Liner Solids Model	9
2.4	Q values obtained by SLSM	16
2.5	Phase velocity by SLSM with 3 relaxation mechanisms	18
2.6	A comparison between setting and actual value in Blanch method	21
2.7	Three rheological models	22
2.8	Q value comparison among Maxwell, Voigt and SLS models	23
3.1	Grid arrangement for the staggered-grid finite difference scheme	28
3.2	A finite element and grid arrangement	32
3.3	Elastic body consisting of nine element	36
3.4	The flow chart of 2D FEM computation	44
3.5	A weight function for moving least square	45
3.6	Value of PML damping function	50
3.7	Numerical model and snapshots of reflected waves	58
3.8	Comparison of waveforms on reflected wave	60
3.9	Comparison of waveforms on PS reflection	61
3.10	Comparison of waveforms on Rayleigh wave; part I	63
3.11	Continue of Fig. 3.10	64
3.12	Comparison of waveforms on Rayleigh wave; part II	65
3.13	Schematic illustrations of the EFGM computation	66
4.1	Schematic illustration of railway site	73
4.2	Picture no. 1 in railway site	74
4.3	Picture no. 2 in railway site	74
4.4	Picture no. 3 in railway site	75
4.5	Graph of the PS logging data	75
4.6	Ground vibration observed at a field site	78
4.7	The axle arrangement of the train	79
4.8	The peak frequencies defined by axle arrangement	80
4.9	Geometry of the Doppler effect	81
4.10	Observed ground vibration for the in-line array	82
4.11	Diagrams of strain gauges for measuring the force on wheel	83
4.12	Force on wheel	84
4.13	First stability condition for the moving source problem	87
4.14	Second stability condition for the moving source problem	89

4.15	Illustration for making numerical moving source	91
4.16	The model illustration by FDM pixel arrangement	93
4.17	3D simulated wavefield for moving source	95
4.18	Simulated waveforms for in-line array observation I	96
4.19	Simulated waveforms for in-line array observation II	97
4.20	Simulated ground vibrations for four individual Q settings	101
4.21	The time-series comparison between field and simulation data	102
5.1	Single element for 3D FEM	106
5.2	Computation flow chart for 3D FEM with parallel computing	107
5.3	Schematics of message passing	107
5.4	Element division for parallel computing	108
5.5	CPU time reduction by parallel computing	109
5.6	Three models for testing numerical accuracy of 3D FEM	111
5.7	Result for elastic halfspace model	111
5.8	Result for elastic wholespace model	112
5.9	Result for viscoelastic wholespace model	112
5.10	A picture of a reinforced viaduct	113
5.11	A schematic illustration of the model of reinforced viaduct	114
5.12	The 3D image of the model in Fig. 5.11	114
5.13	Quasi-static moving source from the weight of train body	115
5.14	Simulated wavefields from viaduct structure	117
5.15	A numerical prediction of the X-shaped measurement construction	118
5.16	A schematics for calculating the averaged velocity	119
5.17	Sheet pile model; Flat case	121
5.18	Sheet pile model; Wavy case	122
5.19	Time series of synthetic transient force	123
5.20	Simulated wavefield for sheet pile model	124
5.21	Waveforms in case of flat sheet pile construction	125
5.22	Waveforms in case of wavy sheet pile construction	125
5.23	Decibel maps for describing the effect of sheet pile construction	126
B.1	Beam element	136
B.2	3D elastic body and beam structure	137
B.3	Waveform comparison between elastic body and beam structure	138
B.4	Connecting part between DEFGM and beam structure	139
B.5	A test model for comparing elastic body model and hybrid model	141
B.6	Waveform comparison between elastic body model and hybrid model	143

表 目 次

2.1	Example for setting constant Q	16
3.1	Shape function	34
3.2	Computational array size	67
3.3	CPU time	67
4.1	Boring log on the railway site	76
4.2	Parameters used in simulation study	94
4.3	Peak values collection of 6 cases	100
5.1	Parameters for accuracy tests	110
5.2	Parameters of viaduct, soil and steel beam	116

第1章 緒言

近年計算機技術が急速に進歩したため、あらゆる技術的分野において、数値計算は不可欠なものとなりつつある。新しい技術は、理論的予測と実験的検証を経て実用化される。数値計算は、この理論的予測のための道具というばかりでなく、実験的検証の代替手段になる場合もある。

本論文は、粘弾性波動方程式の数値計算手法を中心とした研究成果を取りまとめたものである。数計算手法は支配方程式によらず一定の枠組みを持つため、他の研究分野から取り入れたりすることで当分野においても数々のユニークな手法が発案されている。FM-BEM(Fast Multipole - Boundary Element Method) は、波動の伝播に関しては見事に解けるが、解析解とのマッチングがなされていない(Fujiwara, 1998; Fujiwara, 2000)。これは計算グリッド(節点や求積点)上に入力がない場合、一貫した精度を得ることが難しいからと推測される。また、個別要素法は粒子配列を連続体とみなす手法で、破壊現象に伴う波動現象を手軽にシミュレートできる(若月, 2003)。ただし、連続体という枠組みを超えているためパラメータの扱い方が確立されておらず、精度の評価も十分とはいえない(安井, 2006)。CIPM(Cubic Interpolated Profile Method) もまた、数値的誤差の拡大を抑える効果が示されているが、精度の評価が十分になされているとは言い難い(白石, 2007)。

このように新手法は解くべき問題によっては大変効果的であるが、境界値問題の扱い方などに対する考察が不足しがちで、工学的に利用しづらい。結局、数値解法においては差分法(FDM: Finite Difference Method)と有限要素法(Finite Element Method)を2大手法とみなすべきである。新規手法の発達を促すという意味でもこの2手法の詳細な研究がまだまだ必要である。

本研究の第一の目的は、FDMとFEMを中心に精度、計算時間、汎用性の観点で再評価することにある。この取り組みの中で著者らは、DEFGM(Decomposed Element Free Galerkin Method)を新しく提案した(Katou et al., 2006b)。DEFGMは、剛性マトリクスを構成せずにタイムステップごとに応力を評価する計算スキームのもとで、エレメントフリーガラーキン法の移動最小二乗法から求める内挿関数を用いたFEMである。本論文ではDEFGMと、現在最も多用されている空間精度4次のFDMとの比較を中心に計算精度と計算時間が比較検討される。

数値計算が工学的に意味をなすには定量的な議論が必要である。言い換えれば、物理的枠組みを明確にする必要がある。地震学の名著(安芸・リチャーズ, 2004)によれば、当分野を構成する物理的枠組みは、弾性波動の(1)入力、(2)伝達系、(3)入力と伝達系のカップリングの3点である。そして解析的あるいは数値的に問題を解くことで得られた理論予測値は、実験やフィールドデータの値と照合することで、その理論の妥当性が証明されることを忘れてはならない。

例えば、地震学では、震源を推定して数値計算によって地震波を再構成するという研究がしばしば見られる (Furumura and Koketsu, 1998; Komatitsch et al., 2004). これらは、震源力を推定して(インバージョン)、波動場を再構成(フォワード)するものである。しかし、インバージョンにもフォワードにも伝達系として地震波動論を用いているために、インバージョンで誤差があったとしても、再構成される波動場は観測値とよく一致する。結局、(1) 入力 of 推定と (2) 伝達系の妥当性を同時に証明するためには、このようなインバージョンを用いるアプローチは不十分といえる。このような方法論は、理学的には有意義であるが、工学的応用には困難さが残る。

本研究の第二の目的は、数値計算をによる実現象の再現と、さらなる工学的応用である。本論文では、列車走行に起因する地盤振動を対象とした。著者らは、軌道狂いとよばれる線路のわずかな高低差と車両-線路構造物モデルから振源力を推定したが、歪ゲージで直接計測した振源力とは、ある程度誤差があることを確認した (神田ら, 2005). そこで計測された車輪に掛かる力を入力とし、波動場の FDM による再構成を試みる (Katou et al., 2006a). この方法論には、入力が確定しているため、伝達系である波動論の妥当性に絞った議論を可能にする狙いがある。

最後に、FEM と DEFGM による工学的応用について述べる。FDM に比べて、複雑な構造問題の扱いが容易な FEM および DEFGM は、高架橋や防振工事といった人工構造物を評価する際に適切である。そこで、高架橋連結部の補強鋼や鋼矢板の地盤への打設が地盤振動へ与える影響を評価する。

以下は各章ごとの概説である。また、第3～5章では冒頭で研究に至る経緯を、結びで特筆すべき成果について詳細に述べる。

- 第2章では、弾性および粘弾性波動方程式について詳述する。特に、粘弾性波動論は、レオロジーモデルである標準線形固体をもとに導出され、過去の研究を統合し、簡潔かつ詳細な方程式の導出を行う。
- 第3章では、FDM と FEM による数値計算スキームを導出する。また、FEM については、剛性マトリクスを構成せずにタイムステップごとに応力を評価する計算スキーム、およびエレメントフリーガラーキン法の移動最小二乗法から求める内挿関数を用いた DEFGM(Decomposed Element Free Galerkin Method) を中心に議論する。この計算スキームは、本論文の基礎であり、また著者のオリジナルによるものである。
- 第4章では、列車走行に起因する地盤振動を FDM によって再構成する。重要な点は、車輪に歪ゲージを取り付け、走行中の列車において計測された力を振源力としたことである。
- 第5章では、第3章で提案した3次元 FEM の精度評価と並列計算による高速化の検討を行う。その上で、高架橋連結部に取り付けた補強鋼や鋼矢板が地盤振動に与える影響の評価を行う。

第2章 弾性/粘弾性波動方程式の導出

はじめに

本章では、弾性及び粘弾性体を伝播する波動の基本理論を概説する。また、本論文では等方性媒質のみ考慮される。

基本的変数の定義

デカルト座標系において、本論文で用いる定数および変数を以下のように定義する。

- $V_p = V_p(x, y, z)$: P 波速度 [m/s]
- $V_s = V_s(x, y, z)$: S 波速度 [m/s]
- $\rho = \rho(x, y, z)$: 密度 [kg/m³]
- $\lambda = \lambda(x, y, z)$, $\mu = \mu(x, y, z)$: ラメの定数 [kg/ms²]
- $Q_p = Q_p(x, y, z)$: P 波に対する粘性 Q 値
- $Q_s = Q_s(x, y, z)$: S 波に対する粘性 Q 値
- $E = E(x, y, z)$: ヤング率 [Pa]
- $\nu = \nu(x, y, z)$: ポアソン比
- w_l : l 番目の応力緩和時間 (Relaxation time for stress) を与える粘性中心角周波数 ($= 2\pi f_l$).
- $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^t(x, y, z)$: i 軸に直交する面に働く j 軸方向の応力 (internal stress) [Pa]. ただし, $i, j = x, y, z$. 上付き文字 t は時間.
- $\gamma_{ijl} = \gamma_{ijl}^t(x, y, z)$: l 番目のリラクゼーションメカニズムに対する, i 軸に直交する面に働く j 軸方向のメモリー変数 [Pa/s]. ただし, $i, j = x, y, z$.
- $u_i = u_i^t(x, y, z)$: i 軸方向の変位 [m]
- $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$: 変位ベクトル
- $v_i = v_i^t(x, y, z)$: i 軸方向の粒子速度 [m/s]
- $a_i = a_i^t(x, y, z)$: i 軸方向の加速度 [m/s²]

- $f_i = f_i^t(x, y, z) : i$ 軸方向の外加速度 $[\text{m/s}^2]$
- $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) : \text{外加速度ベクトル}$
- $F_i = F_i^t(x, y, z) : i$ 軸方向の外力 $[\text{N}]$
- $\tau_{ij} = \tau_{ij}^t(x, y, z) : i$ 軸に直交する面に働く j 軸方向の外圧力 (traction) $[\text{Pa}]$. ただし, $i, j = x, y, z$. 上付き文字 t は, 時間.
- $\Delta x, \Delta y, \Delta z : \text{グリッド間隔} [\text{m}]$
- $\Delta t : \text{サンプリング間隔} [\text{s}]$

弾性定数の換算式

$$\begin{aligned}\frac{V_p}{V_s} &= \sqrt{\frac{1-\nu}{0.5-\nu}} \\ \rho V_p^2 &= \lambda + 2\mu \\ \rho V_s^2 &= \mu \\ h &= \frac{1}{2Q} \\ E &= 2\rho V_s^2 (1 + \nu)\end{aligned}$$

2.1 弾性体の構成則

弾性体とは, i 軸に直交する面にかかる j 軸方向の応力は k 軸に直交する面にかかる l 軸方向の歪に比例するということである (フックの法則). 即ち,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

である. ここで, C_{ijkl} は弾性定数テンソルである. 弾性体が等方な場合には,

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.2)$$

である. δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数で,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.3)$$

である (安芸・リチャーズ, 2004, pp. 29). また, 歪テンソル ε_{kl} は,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

である. 式 (2.1) ~ (2.4) を弾性体の構成則と呼ぶ.

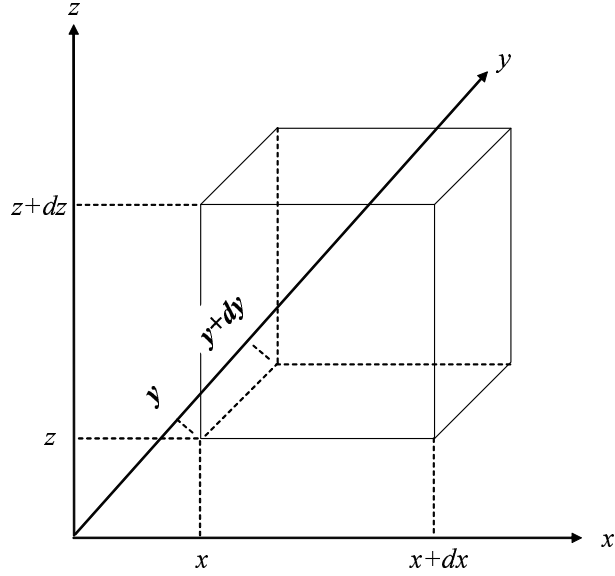


Fig. 2.1: A small volume for introducing equations of motion.

2.2 運動方程式

運動方程式の導出方法は様々あるが、ここでは最も明瞭と思われる微小立方体を用いた導出を行う。Fig. 2.1 に示したデカルト座標系における微小立方体の各 6 面に対して Fig. 2.2 のような面圧力がかかっているとす。テーラー展開を利用して、

$$\sigma_{xx}(x+dx, y, z) = \sigma_{xx}(x, y, z) + dx \frac{\partial \sigma_{xx}(x, y, z)}{\partial x} + O^2 \quad (2.5)$$

この微小体積に対して運動方程式を書き下すと、

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (2.6)$$

である。また、モーメントの釣り合いを考えれば、以下のように応力テンソルが対称である；

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.7)$$

ということもわかる。

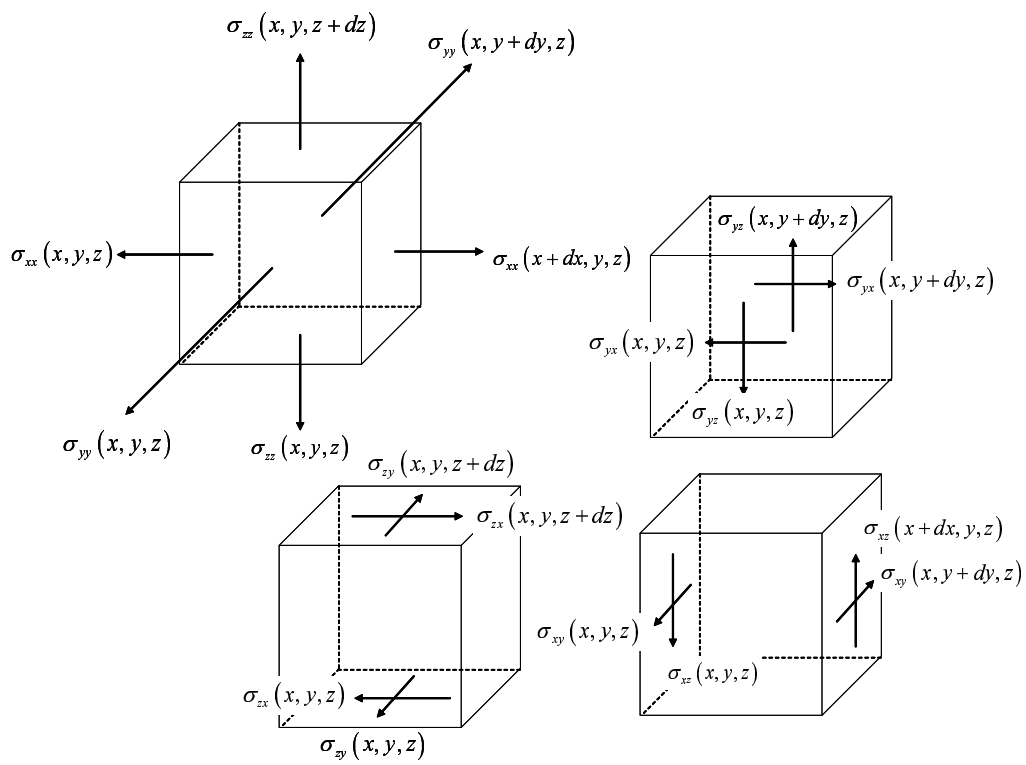


Fig. 2.2: Traction forces on a small volume.

2.3 弾性波動方程式

2.3.1 2次偏微分方程式型

式 (2.6) に式 (2.2) を代入し, 総和規約で表記すると,

$$\rho \ddot{u}_i = \rho f_i + (\lambda + 2\mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} \quad (2.8)$$

となる. あるいは, ベクトル表記の場合,

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \rho \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \bullet \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.9)$$

である. 上付き記号 \bullet は時間微分を意味する.

2.3.2 2組の1次偏微分方程式型

上記の波動方程式は, 数値計算を考える際には, 以下のような速度-応力型の2組の1次偏微分方程式による表記がよく用いられる.

• 2次元-xz 空間

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + f_x \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + f_z \quad (2.14)$$

• 3次元-xyz 空間

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + f_x \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) + f_y \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + f_z \quad (2.23)$$

本研究の主題である, 差分法と有限要素法もこの表記法を使用する.

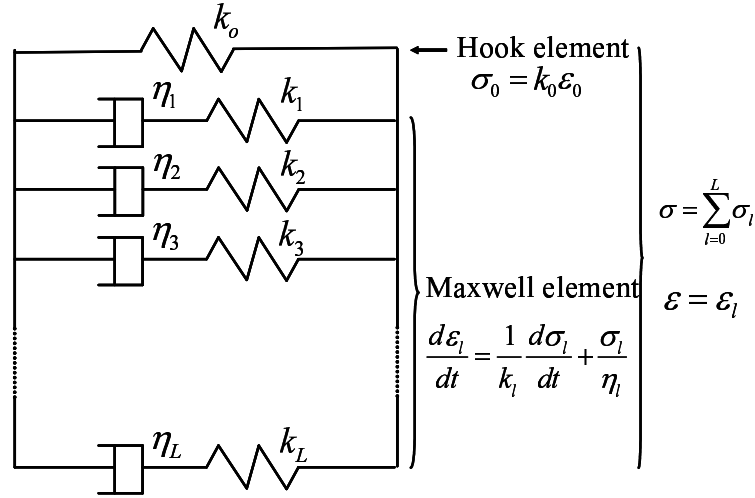


Fig. 2.3: SLSM; Standard Liner Solids Model. This is a rheologic model for explaining constant Q behavior.

2.4 粘弾性体の構成則

2.4.1 標準線形固体モデル (Standard Liner Solids Model)

粘弾性体を伝播する波動方程式は, Fig.2.3 のように $L + 1$ 個のばねと L 個のダッシュポットからなる標準線形固体モデル (SLSM; Standard Liner Solids Model) に基づいて導出される. k は, ばね定数, η はダッシュポットの減衰定数である. 粘性を表現するさまざまなモデルの中でも, 弾性波動論における SLSM の性質に関する研究は, Liu et al. (1976) によって確立された枠組みである. また, SLSM は, 実効上一定, つまり周波数にほとんど依存しない Q 値 (コンスタント Q) に支配される減衰性媒質を表現でき, かつ, 物理的なモデルである (安芸・リチャーズ, 2004, pp. 220).

SLSM において, $l = 0$ の要素はフック要素, それ以外の要素はマクスウェル要素とよばれる. フック要素については運動方程式

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{k_0} \sigma_0 \quad (2.24)$$

マクスウェル要素については運動方程式

$$\frac{d\varepsilon_l}{dt} = \frac{1}{k_l} \frac{d\sigma_l}{dt} + \frac{\sigma_l}{\eta_l}, \quad (l = 1, 2, \dots, L) \quad (2.25)$$

がそれぞれ成り立つ. また, SLSM 全体として以下のような性質がある.

$$\sigma = \sum_{l=0}^L \sigma_l \quad (2.26)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_L \quad (2.27)$$

式 (2.24) から式 (2.27) の両辺を片側ラプラス変換することにより, これらの式は, それぞれ

$$\tilde{\sigma}_0 = k_0 \tilde{\varepsilon}_0 \quad (2.28)$$

$$\left(\frac{s}{k_l} + \frac{1}{\eta_l} \right) \tilde{\sigma}_l = s \tilde{\varepsilon}_l, \quad (l = 1, 2, \dots, L) \quad (2.29)$$

$$\tilde{\sigma} = \sum_{l=0}^L \tilde{\sigma}_l \quad (2.30)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_0 = \tilde{\varepsilon}_1 = \dots = \tilde{\varepsilon}_L \quad (2.31)$$

となる. $\tilde{\sigma}$ と $\tilde{\varepsilon}$ は, それぞれ σ と ε をラプラス変換した関数である. s はラプラス変換に用いる複素変数である. ただし, 式 (2.29) は, 初期条件を $\varepsilon_l(0) = k_l \sigma_l(0)$ としている. これらを1つの式にまとめると

$$\tilde{\sigma} = \sum_{l=1}^L \frac{s \tilde{\varepsilon}}{\frac{s}{k_l} + \frac{1}{\eta_l}} + k_0 \tilde{\varepsilon} \quad (2.32)$$

となる. ここで

$$\tau_{\sigma l} = \frac{\eta_l}{k_l} \quad (2.33)$$

$$\tau_{\varepsilon l} = \frac{\eta_l}{k_0} + \frac{\eta_l}{k_l} \quad (2.34)$$

$$M_R = k_0 \quad (2.35)$$

とおくと, 式 (2.32) は以下のように変形できる.

$$\tilde{\sigma}(s) = M_R \left\{ 1 + \sum_{l=1}^L \frac{(\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l}) s}{1 + s \tau_{\sigma l}} \right\} \tilde{\varepsilon}(s) \quad (2.36)$$

この式 (2.36) は, $\varepsilon(t)$ がインパルスであった時の応答を解析的に解くことはできない. しかし, $\varepsilon(t)$ がヘビサイド関数のとき, つまり

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t) \quad (2.37)$$

とすると, ラプラス変換により次式を得る.

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s} \quad (2.38)$$

次に, 式 (2.38) を式 (2.36) に代入すると

$$\tilde{\sigma}(s) = M_R \left\{ \frac{1}{s} + \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l}}{1 + s \tau_{\sigma l}} \right\} \varepsilon_0 \quad (2.39)$$

となり

$$\tilde{G}(s) = M_R \left\{ \frac{1}{s} + \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l}}{1 + s\tau_{\sigma l}} \right\} = M_R \left\{ \frac{1}{s} + \sum_{l=1}^L \frac{\frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} - 1}{\frac{1}{\tau_{\sigma l}} + s} \right\} \quad (2.40)$$

と置けば, 式 (2.40) をラプラス逆変換することによって解析的な関数

$$G(t) = M_R \left\{ 1 - \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right\} H(t) \quad (2.41)$$

を導くことができる. $\tau_{\sigma l}$, $\tau_{\varepsilon l}$ はそれぞれ, 応力とひずみの l 番目の要素の緩和時間 (Relaxation time for stress and strain, respectively) とよばれる. また M_R は SLSM の場合, 図 2.3 のフック要素の弾性率 k_0 であるが, 一般的には緩和定数とよばれる. この関数 $G(t)$ が SLSM の応力伝達関数 (Stress Relaxation Function) である.

2.4.2 SLSM の連続体への展開

Christensen の仮定

まず, 応力テンソルがひずみテンソルの過去の時間変化に依存するという, 具体的にはコンボリューション (*) を用いて

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl} * \dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{G}_{ijkl} * \varepsilon_{kl} \quad (2.42)$$

と表せるという仮説 (Christensen の仮定) がある. SLSM にヘビサイド関数に対する解析的な応答関数が存在したことや, 後で紹介する Voigt モデル, Maxwell モデルといった, 弾性的 (エネルギーを保存する) 振る舞いと, 粘性的 (エネルギーを吸収する) 振る舞いを結合させたいいくつかの物理モデルならびに過去の実験的な結果から, 一般的に, この仮説を正しいものとして扱っている (Christensen, 1982). σ と ε は時間に依存する関数, $\sigma = \sigma(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$ である.

コンボリューションの性質より式 (2.42) の第 2 項から第 3 項へと変形できる (付録 A の式 (A.6) 参照). 言い換えれば, ひずみテンソルの時間変化は, 関数 $G(t)$ の時間変化に置き換えることができる. これは, 次に説明するメモリー変数法の導入につながる.

Liu et al., (1976) や安芸・リチャーズ (2004) のように, ボルツマンの after-effect を糸口に記述することもできる. これは入力に応力であるという点で直感的に理解しやすい. これと本質的に同じであるが, 式が簡素になる点で, 我々は Christensen の仮定から歪を入力とした記述を用いることにする (Carcione et al., 1988).

SLSM の連続体への展開とメモリー変数法

連続体に対しては, 等方な弾性体が $\lambda + 2\mu$ と μ の2つの定数によって定義されているのと同様に, SLSM によって2つの応力伝達関数,

$$G_p(t) = M_R^p \left\{ 1 + \sum_{l=1}^L \left(\frac{\tau_{\varepsilon l}^p}{\tau_{\sigma l}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right\} H(t) \quad (2.43)$$

$$G_s(t) = M_R^s \left\{ 1 + \sum_{l=1}^L \left(\frac{\tau_{\varepsilon l}^s}{\tau_{\sigma l}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right\} H(t) \quad (2.44)$$

を定義する. M_R^p, M_R^s については後述する. また, $\tau_{\sigma l}$ は両式に対して同じとする, 即ち

$$\tau_{\sigma l} = \tau_{\sigma l}^s = \tau_{\sigma l}^p \quad (2.45)$$

とする. この条件は, 以下に述べるメモリー変数法の式展開に必要である. この妥当性についても後述される. これらを用いて, 3次元 ($i, j, k = x, y, z$) 空間で, 式 (2.42) は次のように展開される.

$$\sigma_{ii} = \dot{G}_p(t) * (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - 2 \dot{G}_s(t) * (\varepsilon_{jj} + \varepsilon_{kk}) \quad (2.46)$$

$$\sigma_{ij} = 2 \dot{G}_s(t) * \varepsilon_{ij} \quad (2.47)$$

式 (2.4) の時間微分,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.48)$$

から,

$$\sigma_{ii} = \dot{G}_p(t) * (\nabla \cdot \vec{v}) - 2 \dot{G}_s(t) * \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.49)$$

$$\sigma_{ij} = \dot{G}_s(t) * \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j \quad (2.50)$$

ここで,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.51)$$

である. 簡単のため, 式 (2.50) から考える. これを

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ij} &= G_s(t) * \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\
&= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) * \left(M_R^s \left[1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^s e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right] \frac{dH(t)}{dt} \right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{dt} \left(M_R^s \left[1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^s e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right] \right) H(t) \right) \\
&= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) * \left(M_R^s \left[1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^s e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right] \delta(t) \right. \\
&\quad \left. + M_R^s \sum_{l=1}^L \tau_l^s \frac{-1}{\tau_{\sigma l}} e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} H(t) \right) \\
&= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) M_R^s \left(1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^s \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) * \left(M_R^s \sum_{l=1}^L \tau_l^s \frac{-1}{\tau_{\sigma l}} e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} H(t) \right) \tag{2.52}
\end{aligned}$$

と変形する. ただし,

$$\begin{aligned}
\tau_l^p &= \frac{\tau_{\epsilon l}^p - \tau_{\sigma l}}{\tau_{\sigma l}} \\
\tau_l^s &= \frac{\tau_{\epsilon l}^s - \tau_{\sigma l}}{\tau_{\sigma l}} \tag{2.53}
\end{aligned}$$

である. $\delta(t)$ はディリクレのデルタ関数である (最後の等号は付録 A の式 (A.9) を参照). この式 (2.52) に対して

$$\gamma_{ijl} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) * \left(M_R^s \tau_l^s \frac{-1}{\tau_{\sigma l}} e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} H(t) \right) \tag{2.54}$$

なる変数 γ_{ijl} (メモリー変数) を用いると

$$\dot{\sigma}_{ij} = M_R^s \left(1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^s \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \sum_{l=1}^L \gamma_{ijl} \tag{2.55}$$

と表せる. 特に γ_{ijl} についても, 式 (2.52) と同様の変形方法から

$$\dot{\gamma}_{ijl} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}} \left\{ M_R^s \tau_l^s \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \gamma_{ijl} \right\} \tag{2.56}$$

という微分方程式に変形できる. 式 (2.49) の場合も同様にしてまとめると

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ii} = & M_R^p \left(1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^p \right) (\nabla \cdot \vec{v}) - 2M_R^s \left(1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^s \right) \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\ & + \sum_{l=1}^L \gamma_{iil} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\dot{\gamma}_{iil} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}} \left\{ M_R^p \tau_l^p (\nabla \cdot \vec{v}) - 2M_R^s \tau_l^s \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \gamma_{iil} \right\} \quad (2.58)$$

となる. この際, 条件式 (2.45) を利用する. このようにして変数 γ を使い, 本来, 変位の 1 回時間微分である変位速度 (Particle velocity) に作用する力を伝達関数の時間微分に置き換えた表現をメモリー変数法 (Memory variable method) とよぶ.

未だ, これらの方程式は $M_R^p, M_R^s, \tau_l^p, \tau_l^s$ を用いた表現となっており, 我々が通常観測する地震波伝播速度や粘性を示すパラメータである V_p や Q 値を用いた表現とはなっており, 一般的には利用しづらい. そこで次に Q 値から τ_l^p, τ_l^s を求め, 地震波の伝播速度から, M_R^p, M_R^s を求める方法について述べる.

2.4.3 Q 値の設計 ($\tau_{\sigma l}, \tau_l^p, \tau_l^s$ の導出)

Q 値とは, エネルギーの減衰を表現するもので, 応力伝達関数の時間 1 回微分から導出される (Carcione, 1988; 安芸・リチャーズ, 2004, pp. 219). 結果的に, 式 (2.41) に示した応力伝達関数 $G(t)$ のフーリエ変換を用いた複素応力係数 (Complex Stress Modulus) $M(\omega)$ から導出される.

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{G}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.59)$$

$$Q(\omega) = \frac{\text{Re}[M(\omega)]}{\text{Im}[M(\omega)]} \quad (2.60)$$

ここで, i は複素単位, ω は角速度である. これから粘性 Q 値は, 周波数依存の実関数 $Q = Q(\omega)$ で定義される. SLS においては, 式 (2.59), 式 (2.60) および式 (2.41) より

$$M(\omega) = M_R \left(1 - L + \sum_{l=1}^L \frac{1 + i\omega\tau_{\varepsilon l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}} \right) \quad (2.61)$$

$$Q(\omega) = \frac{1 + \sum_{l=1}^L \frac{\omega^2(\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l})\tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2\tau_{\sigma l}^2}}{\sum_{l=1}^L \frac{\omega(\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l})}{1 + \omega^2\tau_{\sigma l}^2}} = \frac{1 - L + \sum_{l=1}^L \frac{1 + \omega^2\tau_{\varepsilon l}\tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2\tau_{\sigma l}^2}}{\sum_{l=1}^L \frac{\omega(\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l})}{1 + \omega^2\tau_{\sigma l}^2}} \quad (2.62)$$

と表される. ここで

$$\tau_l = \frac{\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l}}{\tau_{\sigma l}} \quad (2.63)$$

とおくと

$$Q(\omega) = \frac{1 + \sum_{l=1}^L \frac{\omega^2 \tau_{\sigma l}^2}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \tau_l}{\sum_{l=1}^L \frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \tau_l} \quad (2.64)$$

となる. これが SLSM の Q 値の特性である.

しかし我々は, Q 値を与えることによって波動場を計算したい. そこで, 式 (2.64) より, L 次連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots & Q(\omega_{l_1})E_{l_1 l_2} - F_{l_1 l_2} & \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \tau_{l_2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad l_1, l_2 = 1, 2, \dots, L \quad (2.65)$$

をたてる. ただし,

$$E_{l_1 l_2} = \frac{\omega_{l_1} \tau_{\sigma l_2}}{1 + (\omega_{l_1} \tau_{\sigma l_2})^2}, \quad F_{l_1 l_2} = \frac{(\omega_{l_1} \tau_{\sigma l_2})^2}{1 + (\omega_{l_1} \tau_{\sigma l_2})^2} \quad (2.66)$$

これより, L 個の特定の周波数で, Q 値を与えることにより, 関数 $Q(\omega)$ を設計することができる.

例えば, 0.1 ~ 10Hz が考察の対象で, $Q(\omega) = 40$ を設計したいとする. 式 (2.64) の分母は, L 個の上に凸な関数の和である. そしてその最大値が,

$$\omega = \frac{1}{\tau_{\sigma l}} \quad (2.67)$$

によって与えられることに注目し, Table 2.1 のように $L = 3$ で, $\omega_l = 1/\tau_{\sigma l}$ と $Q(\omega_l)$ を与えて, 式 (2.65) を解く. これから, Table 2.1 の最下段にある無次元量 τ_l が得らる. これをもとに, 式 (2.64) は周波数に依存する関数となり, この例の場合には, Fig. 2.4 のようなグラフを得る. 誤差 1 パーセント未満でコンスタント Q を表現するには, $L = 10$ 以上が必要であるが, 本論文でも後で確認するが, 数値計算と準解析解の比較が示すように, 実用上の観点で見れば $L = 3$ あれば十分である (Käser and Dumbser, 2007).

粘弾性波動方程式中の $\tau_{\sigma l}$ と τ_l は, 以上の手順で与えることができる. またこの方法を用いると, コンスタント Q 以外にも様々な周波数依存性のある Q 値を表現することが可能である. ただし, 式 (2.33), (2.34), (2.63) より,

$$\tau_l > 0 \quad (2.68)$$

を確認する必要がある.

Table 2.1: Example for setting constant Q from three relaxation mechanisms. This data set produces almost constant Q ($Q(\omega) = 40$) at 0.1 ~ 10 Hz as shown in Fig. 2.4.

l	1	2	3
$\omega_l/(2\pi) = 1/(2\pi\tau_{\sigma l})$ [Hz]	0.1	1.0	10
$Q(\omega_l)$	39.0	38.5	39.0
Obtained τ_l	4.42E-2	3.69E-2	4.85E-2

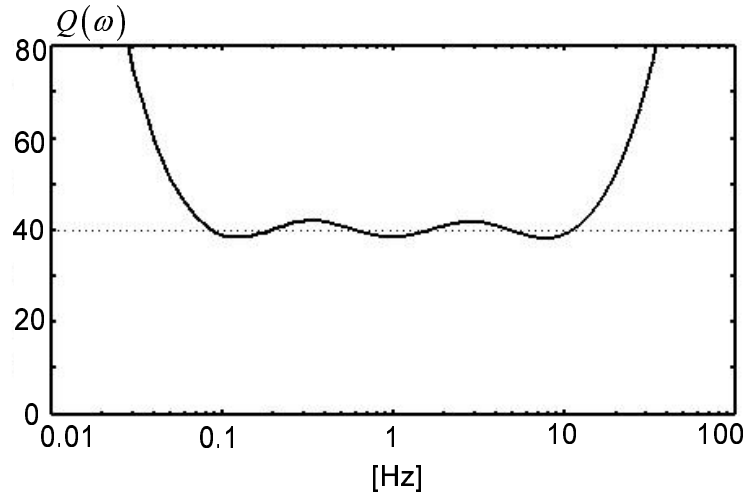


Fig. 2.4: Q values obtained by SLSM. This graph is obtained from Table 2.1 and Eq. (2.64).

2.4.4 地震波動伝播速度の設計 (M_R^p, M_R^s の導出)

Q 値の導出と同様にして, Carcione, (1988) あるいは, 安芸・リチャーズ, (2004, pp. 219) から, 波動伝播速度は

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{\text{Re}[M(\omega)]}{\rho}} \quad (2.69)$$

によって定義できる. これを位相速度とよぶ. この式は, 等方均質な媒質であっても, 粘性を考慮した場合は波が分散することも示している. 式 (2.69) に式 (2.61) を代入すると

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{M_R}{\rho} \left(1 + \sum_{l=1}^L \frac{\omega^2 (\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l}) \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \right)} \quad (2.70)$$

である. さらに, 式 (2.63) を利用すると

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{M_R}{\rho} \left(1 + \sum_{l=1}^L \frac{\omega^2 \tau_{\sigma l}^2}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \tau_l \right)} \quad (2.71)$$

となる. この式から, 周波数が高いほど位相速度 $c(\omega)$ も大きいことがわかる. Q 値の設計と同様に, 任意の周波数から位相速度を設計できるが, 普段地震波の伝播速度 V_p, V_s は, 到達時間によって算出されることから, 最も伝播の速い

$$c(\infty) = \sqrt{\frac{M_R}{\rho} \left(1 + \sum_{l=1}^L \tau_l \right)} \quad (2.72)$$

を計測していると考えてよい (安芸・リチャーズ, 2004, pp. 219). この式から, M_R を求めることができる. 例えば, Q 値の設計の際に得られた Table. 2.1 と $c(\infty) = 1000$ から Fig. 2.5 が得られる. 式 (2.72) から式 (2.55), (2.57) 中の M_R^p, M_R^s は,

$$V_p = \sqrt{\frac{M_R^p}{\rho} \left(1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^p \right)} \quad (2.73)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{M_R^s}{\rho} \left(1 + \sum_{l=1}^L \tau_l^s \right)} \quad (2.74)$$

によって求めることができる. つまり, 式 (2.55), (2.57) はそれぞれ,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \rho V_s^2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \sum_{l=1}^L \gamma_{ijl} \quad (2.75)$$

$$\dot{\sigma}_{ii} = \rho V_p^2 (\nabla \cdot \vec{v}) - 2\rho V_s^2 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \sum_{l=1}^L \gamma_{iil} \quad (2.76)$$

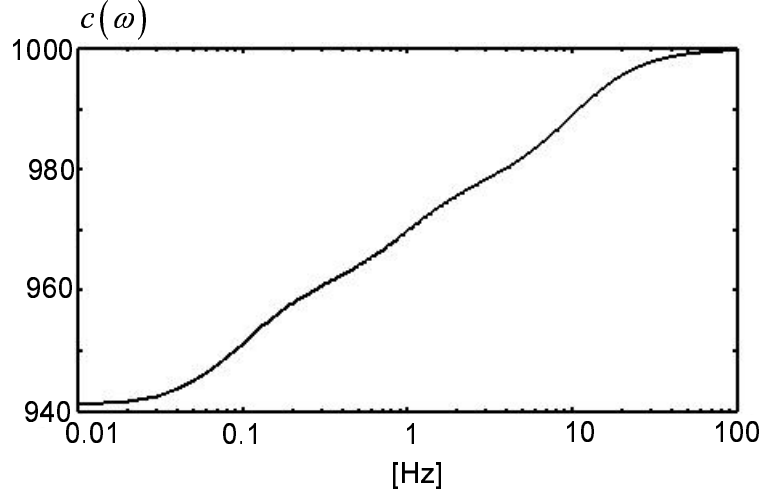


Fig. 2.5: Phase velocity by SLSM with 3 relaxation mechanisms. This graph is obtained from Table 2.1, Eq. (2.71) and $c(\infty) = 1000$.

であり, 実は, 粘弾性体の構成則はフックの法則にメモリー変数を加えたものであるということがわかる.

2.4.5 Blanch 法

Q 値の設計方法の一つとして Blanch et al., (1995) の方法 (Blanch 法) を示す. この方法は, コンスタント Q の設計の際の簡便なインターフェイスになり, 後述するように, Relaxation Mechanism が 1 つ ($L = 1$) の時, 有効といえる.

前に, コンスタント Q を作成した際, 式 (2.64) の分母が上に凸の関数の和であったことや, 結果的に, τ_l は, l に関わらずほぼ一定であった (Table 2.1 参照). そこでまず, 式 (2.63) に対して, 全ての l において τ_l は同じ値 τ をとると仮定すると, 式 (2.64) は

$$Q(\omega) = \frac{1 + \sum_{l=1}^L \frac{\omega^2 \tau_{\sigma l}^2}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \tau}{\sum_{l=1}^L \frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \tau} \quad (2.77)$$

となる. 次に, Q が 1 よりある程度大きいときは, 式 (2.77) はさらに簡略化されて

$$Q^{-1}(\omega) \cong \sum_{l=1}^L \frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \tau \quad (2.78)$$

と近似することができる. この式 (2.78) を用いて

$$J = \int_{\omega_a}^{\omega_b} (Q^{-1}(\omega, \tau_{\sigma l}, \tau) - Q_0^{-1})^2 d\omega \quad (2.79)$$

なる変数 J を定義する. いま, Q の値はある区間 $[\omega_a, \omega_b]$ で変化しない, すなわち

$$Q \cong Q_0, \quad \omega_a \leq \omega \leq \omega_b \quad (2.80)$$

とすると

$$\frac{dJ}{d\tau} = 0 \quad (2.81)$$

と言うことができる. 式 (2.78), 式 (2.79) および式 (2.81) から

$$\frac{dJ}{d\tau} = \int_{\omega_a}^{\omega_b} \left\{ 2 \left(\sum_{l=1}^L \frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \tau - \frac{1}{Q_0} \right) \times \sum_{l=1}^L \frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \right\} d\omega = 0 \quad (2.82)$$

となる. この式 (2.82) を τ について解くと

$$\tau = \frac{1}{Q_0} \frac{\sum_{l=1}^L I_{0l}}{\sum_{l=1}^L I_{1l} + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{k=l+1}^L I_{2lk}} \quad (2.83)$$

となる. ここで

$$I_{0l} = \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} d\omega = \frac{1}{2\tau_{\sigma l}} [\log(1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2)]_{\omega_a}^{\omega_b} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} I_{1l} &= \int_{\omega_a}^{\omega_b} \left(\frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \right)^2 d\omega = \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{1}{2\tau_{\sigma l}} \left(\frac{\tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} - \frac{\tau_{\sigma l} - \omega^2 \tau_{\sigma l}^3}{(1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2)^2} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\tau_{\sigma l}} \left[\arctan(\omega \tau_{\sigma l}) - \frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \right]_{\omega_a}^{\omega_b} \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} I_{2lk} &= \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{\omega \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} \frac{\omega \tau_{\sigma k}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma k}^2} d\omega \\ &= \frac{\tau_{\sigma l} \tau_{\sigma k}}{\tau_{\sigma k}^2 - \tau_{\sigma l}^2} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2} - \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma k}^2} \right) d\omega \\ &= \frac{\tau_{\sigma l} \tau_{\sigma k}}{\tau_{\sigma k}^2 - \tau_{\sigma l}^2} \left[\frac{\arctan(\omega \tau_{\sigma l})}{\tau_{\sigma l}} - \frac{\arctan(\omega \tau_{\sigma k})}{\tau_{\sigma k}} \right]_{\omega_a}^{\omega_b} \end{aligned} \quad (2.86)$$

である.

$L = 1$ のとき

SLSM において $L = 1$ であるとき, 式 (2.78), (2.83) はそれぞれ

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\omega \tau_\sigma}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} \tau \quad (2.87)$$

$$\tau = \frac{1}{Q_0} \frac{I_{01}}{I_{11}} \quad (2.88)$$

である. さらに,

$$\tau_\sigma = \frac{1}{\omega_0} \quad (2.89)$$

と式 (2.80) において

$$\omega_a = \frac{1}{2} \omega_0, \quad \omega_b = \frac{3}{2} \omega_0 \quad (2.90)$$

として, 式 (2.88) の τ を求めれば, 粘弾性波動方程式を Q_0, ω_0 から定義できる. 即ち, $L = 1$ において粘弾性波動方程式は以下に集約される.

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial t} = \rho V_p^2 (\nabla \cdot \vec{v}) - 2\rho V_s^2 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \gamma_{ii} \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \rho V_s^2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \gamma_{ij} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial t} = & -\frac{1}{\tau_\sigma} \left\{ \gamma_{ii} + \rho V_p^2 (1 + \tau^p) \tau^p (\nabla \cdot \vec{v}) \right. \\ & \left. - \rho V_s^2 (1 + \tau^s) \tau^s \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_\sigma} \left\{ \gamma_{ij} + \rho V_s^2 (1 + \tau^s) \tau^s \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (2.95)$$

そして Blanch 法から,

$$\tau_\sigma = \frac{1}{\omega_0} \quad (2.96)$$

$$\tau^p = 1 + \frac{1}{Q_{0p}} \frac{I_{01}}{I_{11}} \quad (2.97)$$

$$\tau^s = 1 + \frac{1}{Q_{0s}} \frac{I_{01}}{I_{11}} \quad (2.98)$$

を用いれば, $V_p, V_s, \rho, \omega_0, Q_{0p}, Q_{0s}$ の 6 つのパラメータから粘弾性波動方程式を解くことができる.

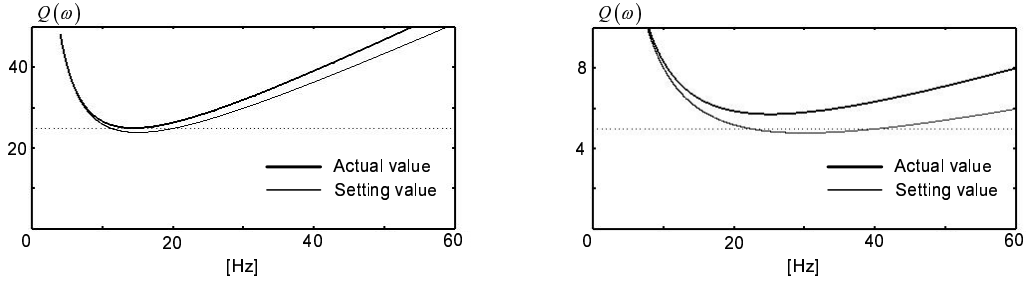
(a) $Q = 25$ by 15 Hz central(b) $Q = 5$ by 30 Hz central

Fig. 2.6: A comparison between setting and actual value in Blanch method.

$L = 1$ の Blanch 法の安定性

Blanch 法は、式 (2.64) を (2.78) にまで、 Q 値が 1 よりある程度大きい条件で近似している。一方で $L = 1$ の際は、式 (2.64) から (2.77) への τ_l が l によらず一定という近似が不要なので、 Q 値の大きさについてのみ議論すればよい。

まとめると、ここでは、 Q 値の設計は式 (2.78) より、

$$Q^{Bset}(\omega) = \frac{1 + (\tau_\sigma \omega)^2}{\tau_\sigma \omega \tau} \quad (2.99)$$

で行うが、波動方程式は式 (2.64) より、

$$Q^{Bact}(\omega) = \frac{1 + \frac{(\tau_\sigma \omega)^2 \tau}{1 + (\tau_\sigma \omega)^2}}{\frac{\tau_\sigma \omega \tau}{1 + (\tau_\sigma \omega)^2}} \quad (2.100)$$

によって支配されているということである。よって式 (2.99) と Blanch 法を使って求めた τ を代入した設計式 (2.99) と実効式 (2.100) を比較する。Fig. 2.6(a) は、 $\omega_0 = 2\pi \times 15$ Hz で $Q_0 = 25$ としたとき、Fig. 2.6(b) は、 $\omega_0 = 2\pi \times 30$ Hz で $Q_0 = 5$ としたときの比較である。 $Q = 25$ のときは、設定式と実効式はほとんど同じであるが、設定式で $Q = 5$ のときは、実効式は $Q = 6$ 程度を示す。 Q 値が十分大きくなくても、Blanch 法は利用できる。ただし、 Q 値を 1 桁程度で設計する際、この 2 式を比較して、実効値を確認することが必要といえる。

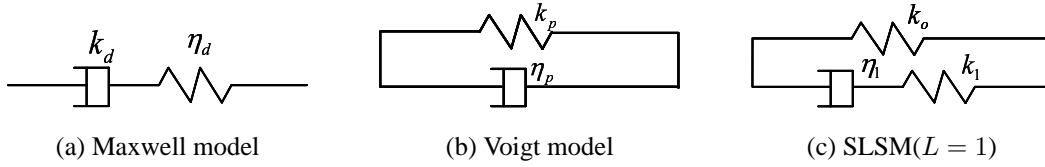


Fig. 2.7: Three rheological models.

他のレオロジーモデルとの比較

Fig.2.7 に示した 3 つのモデル (Maxwell, Voigt, SLSM($L = 1$)) を比較する. Maxwell, Voigt モデルについてはそれぞれ, 式 (2.60) から求めた Q 値を $Q^M(\omega)$, $Q^V(\omega)$ とおき,

$$Q^M(\omega) = \frac{k_d \omega}{\eta_d} \quad (2.101)$$

$$Q^V(\omega) = \frac{\eta_p}{k_p \omega} \quad (2.102)$$

と導けられる. SLSM の場合は式 (2.100) の Blanch 法を使用する. Fig. 2.8 にこれら 3 モデルでの Q 値の比較を示す. これは, 3 つのモデルが, $\omega_0 = 2\pi \times 15$ Hz のとき $Q = 25$ となるように設計されている. これは媒体の粘性の周波数に対する特性を表しているともいえる.

Maxwell, Voigt モデルは比較的単純な周波数依存性を示す. つまり, 建築物や機械, 静的な地盤に対して適切なモデルである. Fig. 2.7(b) における運動方程式から, 粘性 h 値の定義をあてはめると

$$h(\omega) = \frac{\eta_p \omega}{2k_p} = \frac{1}{2Q^M(\omega)} \quad (2.103)$$

である.

自然の地下を伝播する波動の減衰は, 岩石の結晶構造の欠落等による内部摩擦, あるいは散乱性, 圧縮性, 異方性といった等方均質という枠組みを超えたさまざまな要因から成るため, 平均的にコンスタント Q を扱える SLSM が適当であると考えられる.

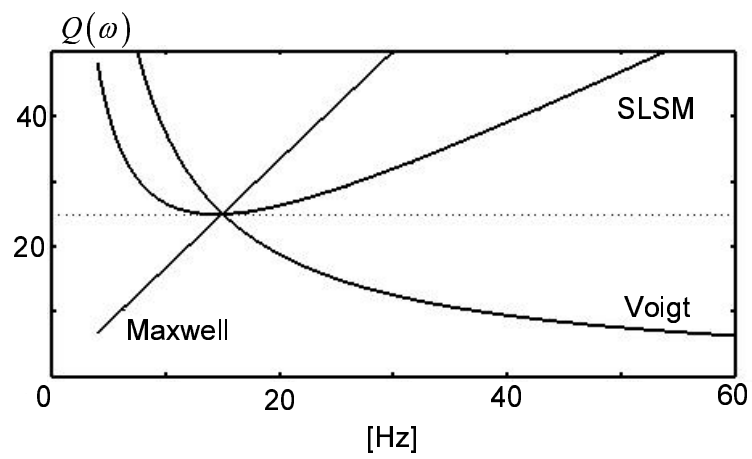


Fig. 2.8: Q value comparison among Maxwell, Voigt and SLS models. These three graphs are obtained from Eq. (2.101), (2.102) and (2.100), respectively.

第3章 2次元差分法と有限要素法の比較

3.1 はじめに

本章では、差分法 (FDM: Finite Difference Method) と有限要素法 (FEM: Finite Element Method) を中心に計算手法の解説と2次元問題における計算精度の比較検討を行う。また、FEM に関しては、エレメントフリーガラキン法の移動最小二乗法によって求める内挿関数を用い、さらに剛性マトリクスを構成せずに各タイムステップごとに応力を評価する DEFGM(Decomposed Element Free Galerkin method) を中心に検討する。

現在、弾性波方程式を解く数値解法は、FDM が主流といえる。とりわけ、4次精度スタaggeredグリッドのFDMは、比較的容易なプログラミングと実用上十分な計算精度を提供する (Virieux, 1986; Graves, 1996)。FDMの中でより高精度を求める場合、PS-FDM(Pseudo Spectral)がある (Carcione, 1994)。局所的な構造よりも大局的な構造を議論する自然地震や資源探査の分野では優位といえる。あるいは、Komatitsch and Tromp (1999) のスペクトルエレメント法 (SEM: Spectral Element Method) のように、高次多項式による内挿関数を利用したFEMも極めて高い精度を誇り、かつ全地球モデルでの計算も可能となるほどプログラミング技術の発達も伺える (Komatitsch and Tromp, 2002)。さらには、高次多項式内挿による、三角形・四面体の要素によるFEMの一種である、ADER-DG(Arbitrary high-order DERivatives - Discontinuous Galerkin method) も現れた (Käser and Dumbser, 2006; Dumbser and Käser, 2006)。FEMベースの手法の最大の利点は、体積が明確に存在するため、座標変換の概念が理解しやすい。また、境界条件に対する適用がFDMに比べて容易であることである。ただし、高次内挿は1つの有限要素を構成するのに必要な接点の数が多くなるため、相対的にミクロな構造を扱う際に不利である。

以上を踏まえると、低次内挿で高精度なFEMこそ最も強力な手法と考えられる。そこで Belytschko et al., (1994) のエレメントフリーガラキン法 (EFGM: Element Free Galerkin method) に注目する。EFGMは、移動最小二乗法で内挿関数を作るFEMで変形・破壊現象をシミュレートするために提案された。これをもとに、Lu et al., (1995) は運動方程式を解くことで動的に変形・破壊現象のシミュレーションへと発展させた。さらに、Jia and Hu (2006) はEFGMによる弾性波伝播をシミュレートした。移動最小二乗法を用いた一連の数値計算手法は、メッシュフリー法ともよばれる (Liu, 2003)。

変形・破壊現象において、EFGMは従来のFEMの精度を向上させる可能性があるということが Belytschko et al., (1994) や武川 (2007) からわかる。この精度向上は波動伝播の問題においても期待できる。EFGMを波動伝播問題に適用する際の最大の問題点は、剛性マトリクスに必要な計算メモリである。例えば、 100×100 ポイントの節点を使う場合、剛性マトリクスに必要なアレイサイズは、 50×20000 (25の隣接

している節点 \times 2 自由度 \times 10000 の全節点 \times 2 自由度) となる. Jia and Hu (2006) の場合, 41×41 ポイントしか扱えていない.

FEM において, 剛性マトリクスを作らずに計算を行う方法もあり, ボクセル型 FEM とよばれる (Koketsu et al., 2004; Ma et al., 2004). このアイデアは, 計算メモリの大幅な削減になるだけでない. 通常剛性マトリクスを使用する計算において, PML 吸収境界条件の適用は 2 次になるが (Komatitsch and Tromp, 2003), ボクセル型 FEM のような, 剛性マトリクスを使用しない方法は, 1 次の PML が適用できる (Collino and Tsogka, 2001). ただし, これら剛性マトリクスを利用しない方法の全てが, 2 次精度の FEM の一種である.

本研究の重要な点は, 4 次精度の FDM の精度を上回るために, 3 次精度の FEM に対して, 剛性マトリクスを使用しない計算手法 DEFGM (Decomposed Element Free Galerkin Method) を提案したことである. そして, この精度の限界を確認するため, 大領域の計算を差分法並みの計算メモリで可能にする DEFGM を中心に議論する (Katou et al., 2006b).

3.2 差分法 (FDM: Finite Difference Method)

3.2.1 スタガード格子

差分化によって構成則 (2.10) ~ (2.12) は,

$$\frac{\Delta\sigma_{xx}}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta v_z}{\Delta z} \quad (3.1)$$

$$\frac{\Delta\sigma_{zz}}{\Delta t} = \lambda \frac{\Delta v_x}{\Delta x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta v_z}{\Delta z} \quad (3.2)$$

$$\frac{\Delta\sigma_{xz}}{\Delta t} = \mu \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta z} + \frac{\Delta v_z}{\Delta x} \right) \quad (3.3)$$

運動方程式 (2.13), (2.14) は,

$$\rho \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\sigma_{xx}}{\Delta x} + \frac{\Delta\sigma_{xz}}{\Delta z} \right) + f_x \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\sigma_{xz}}{\Delta x} + \frac{\Delta\sigma_{zz}}{\Delta z} \right) + f_z \quad (3.5)$$

となる.

スタガード格子を利用する場合, 構成則と運動方程式は交互に解かれる. Fig. 3.1のように, 変数 σ, v を $\Delta x/2, \Delta z/2$ おきの食い違った点に配置することで, 同じ点で定義するより, データを密に配置できる. 従って式 (3.1) ~ (3.3) の 2 次精度の差分スキームは, グリッド (i, j) , 時間 t を中心に

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^{t+\Delta t/2}(i, j) - \sigma_{xx}^{t-\Delta t/2}(i, j)}{\Delta t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{v_x^t(i + \Delta x/2, j) - v_x^t(i - \Delta x/2, j)}{\Delta x} \\ &\quad + \lambda \frac{v_z^t(i, j + \Delta z/2) - v_z^t(i, j - \Delta z/2)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}^{t+\Delta t/2}(i, j) - \sigma_{zz}^{t-\Delta t/2}(i, j)}{\Delta t} &= \lambda \frac{v_x^t(i + \Delta x/2, j) - v_x^t(i - \Delta x/2, j)}{\Delta x} \\ &\quad + (\lambda + 2\mu) \frac{v_z^t(i, j + \Delta z/2) - v_z^t(i, j - \Delta z/2)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xz}^{t+\Delta t/2}(i, j) - \sigma_{xz}^{t-\Delta t/2}(i, j)}{\Delta t} &= \mu \frac{v_z^t(i + \Delta x/2, j) - v_z^t(i - \Delta x/2, j)}{\Delta x} \\ &\quad + \mu \frac{v_x^t(i, j + \Delta z/2) - v_x^t(i, j - \Delta z/2)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

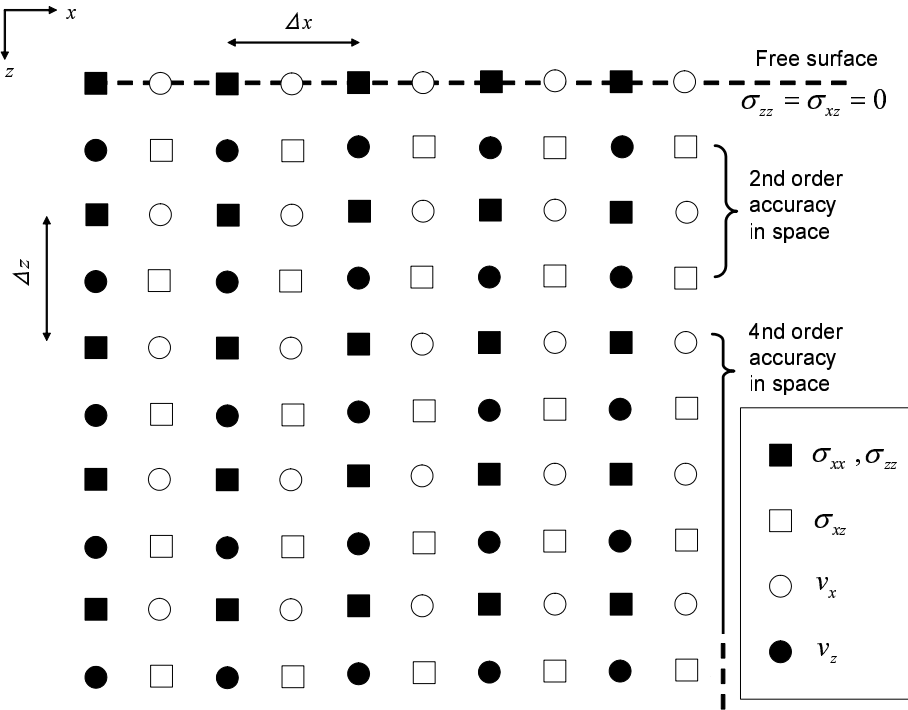


Fig. 3.1: Δx and Δz are the grid spacing for x- and z-direction respectively. A free surface boundary is computed by the Levander's (1988) image method.

である. 同様にして式 (3.4), (3.5) も

$$\rho \frac{v_x^{t+\Delta t/2}(i, j) - v_x^{t-\Delta t/2}(i, j)}{\Delta t} = \frac{\sigma_{xx}^t(i + \Delta x/2, j) - \sigma_{xx}^t(i - \Delta x/2, j)}{\Delta x} + \frac{\sigma_{xz}^t(i, j + \Delta z/2) - \sigma_{xz}^t(i, j - \Delta z/2)}{\Delta z} \quad (3.9)$$

$$\rho \frac{v_z^{t+\Delta t/2}(i, j) - v_z^{t-\Delta t/2}(i, j)}{\Delta t} = \frac{\sigma_{xz}^t(i + \Delta x/2, j) - \sigma_{xz}^t(i - \Delta x/2, j)}{\Delta x} + \frac{\sigma_{zz}^t(i, j + \Delta z/2) - \sigma_{zz}^t(i, j - \Delta z/2)}{\Delta z} \quad (3.10)$$

である. よって, σ と v を時間的に $\Delta t/2$ 食い違わせれば, 式 (3.6) ~ (3.8) と, (3.9), (3.10) を交互にアップデートすることで, 弾性波動方程式を解くことができる.

空間精度 4 次

式 (3.1) ~ (3.5) の $\Delta v / \Delta x$ 等の空間差分に対して

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{\Delta x} & \left(-\frac{1}{24} v^t \left(i + \frac{3\Delta x}{2}, j \right) + \frac{9}{8} v^t \left(i + \frac{\Delta x}{2}, j \right) \right. \\ & \left. - \frac{9}{8} v^t \left(i - \frac{\Delta x}{2}, j \right) + \frac{1}{24} v^t \left(i - \frac{3\Delta x}{2}, j \right) \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

と置けば, 空間精度は 4 次となる.

この 4 次精度は, 後で FEM 等と比較検討される. 2 次精度からの拡張が FEM に比べて, 非常に簡潔である. このようにして, 簡便に精度を向上できることは FDM の優れている点である.

3.2.2 自由境界スキーム 1; Image method

地表面に対する弾性体の境界条件を自由境界あるいは Free surface とよぶ. Fig. 3.1 からわかるように, 地表面上のグリッドは, 地表面を挟んだ差分スキームを形成できない. 具体的には, σ_{xx} , σ_{zz} , v_x を解く際にスキームの変形が必要である. Levander(1988) は, 以下のような自由境界の取り扱いを提案した. これは, 空間精度 2 次のスキームから求まる. まず自由境界条件

$$\sigma_{zz}(x, 0) = 0 \quad (3.12)$$

で σ_{zz} は固定され, 次に,

$$\frac{\partial \sigma_{zz}(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (3.13)$$

もいえるので, 式 (3.2) より

$$\frac{\Delta v_z}{\Delta z} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \quad (3.14)$$

となり, z 方向の差分を x 方向の差分で置き換えることができる. これを代入し, 式 (3.1) を解く. 即ち式 (3.6) の代わりに,

$$\frac{\sigma_{xx}^{t+\Delta t/2}(i, j) - \sigma_{xx}^{t-\Delta t/2}(i, j)}{\Delta t} = \left(\frac{4\lambda\mu + 4\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{v_x^t(i + \Delta x/2, j) - v_x^t(i - \Delta x/2, j)}{\Delta x} \quad (3.15)$$

を解く. 最後に自由境界条件,

$$\sigma_{xz}(x, 0) = 0 \quad (3.16)$$

から, 式 (3.9) において,

$$\frac{\sigma_{xz}^t(i, j + \Delta z/2) - \sigma_{xz}^t(i, j - \Delta z/2)}{\Delta z} = \frac{2\sigma_{xz}^t(i, j + \Delta z/2)}{\Delta z} \quad (3.17)$$

と置き換えて解けばよい.

3.2.3 自由境界スキーム 2; Vacuum method

Image method と並び, 広く利用されている Vacuum method について説明する. この方法は, 弾性パラメータを

$$V_p = V_s = 0 \quad (3.18)$$

と置くことによって, この領域との境界を自由境界と見なす方法である (Graves, 1996). この境界は, グリッドの midpoint に位置することになる (Robertsson, 1996).

回転スタガード格子 (Rotated staggered grid) を使用すると, Vacuum method の精度は向上するが, 通常のスタガード格子にせよ, 精度は Image method よりも悪い (Bohlen and Saenger, 2006). しかしながら, 地表面の高度変化がある場合, Image method を使用するよりも, グリッドの midpoint に境界が存在する Vacuum method の方が精度が良い. 従って, フラットな地表面に対しては Image method, 高度変化のある部分には Vacuum method を用いるのが良い (Hayashi, 1999). しかしながら, 回転スタガード格子の利用は計算量が増えるため, 結局のところ通常のスタガード格子でグリッド間隔を小さくする方が FDM の特徴を活かせると考えられる.

3.3 有限要素法 (FEM: Finite Element Method)

3.3.1 内挿関数

ガウス・ルジャンドル求積法

Fig. 3.2(a) は自然座標と呼ばれ, 区間 $[-1, 1]$ で定義された正方形要素である. 白丸で表された 9 つの節点と黒四角で表された 9 つのガウスルジャンドル求積が配置されている. 計算上, 節点に粒子速度, 求積点に応力が配置されていることになる. この正方形上での求積法について説明する. ここでガウス・ルジャンドル求積法は, ラグランジェ補間法によって決められた m 個の区分点上の値から, $2m + 1$ 次以下の多項式の積分を誤差なしに求める方法である.

本章にて用いるのは 2 次元 2 次関数を積分するために 3×3 の決められた点で,

$$G = 0.7745867$$

, そして求積点 i の重み q_i は

$$\begin{aligned} q_i &= q_v = q_{vi} = q_{ix} = 0.88888888 \times 0.88888888 \div 4 \\ q_{ii} &= q_{iii} = q_{vii} = q_{viii} = 0.55555555 \times 0.88888888 \div 4 \\ q_{iv} &= 0.55555555 \times 0.55555555 \div 4 \end{aligned}$$

である (久田・野口, 2002, pp. 166). 即ち, $2m + 1$ 次以下の多項式からなる関数 $f(\xi, \eta)$ は,

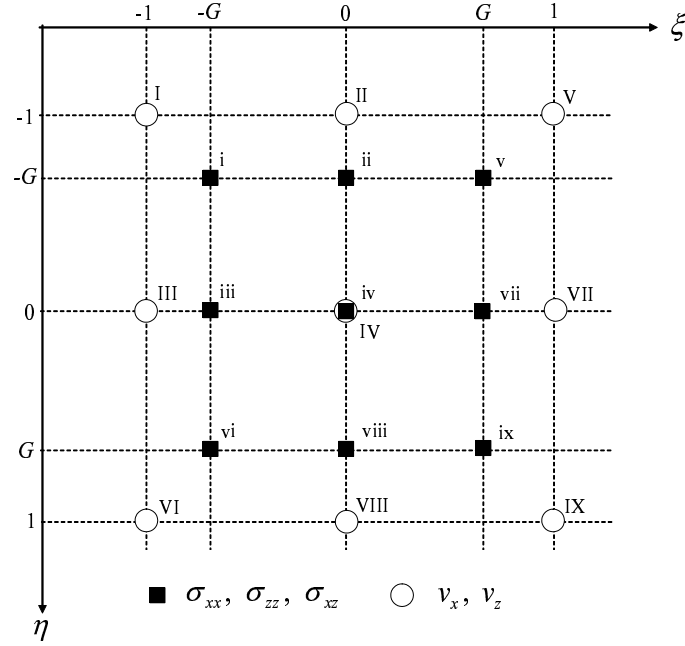
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 4 \sum_{i=i}^{ix} [q_i f(\xi_i, \eta_i)] \quad (3.19)$$

によって厳密に積分できる. 右辺の 4 とは, 正方形要素の面積を意味する. 通常の場合, 2×2 の求積点で十分であるが, エレメントフリーガラキン法の導入を念頭に置き, 3×3 の求積点を使用する.

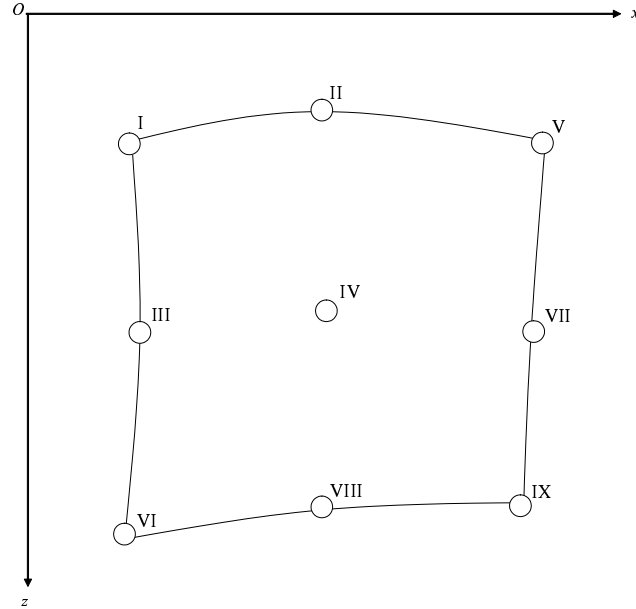
アイソパラメトリック要素と座標変換

一般的な FEM における有限要素は, アイソパラメトリック要素と呼ばれる. 今, 要素内で粒子速度が,

$$v(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^2\eta^2 \quad (3.20)$$



(a) Regular space



(b) Real space

Fig. 3.2: (a) A finite element and grid arrangement in regular space. This element is defined under the concept of third-order accuracy in space and is including 3×3 Gauss-Legendre integral points. (b) A finite element in real space.

で定義されているとすると, 9 つの節点上での値 $[v(\xi_I, \eta_I), v(\xi_{II}, \eta_{II}), \dots, v(\xi_{IX}, \eta_{IX})]$ を利用して連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & (-1)^2 \times (-1)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \times (-1)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1^2 \times 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(\xi_I, \eta_I) \\ v(\xi_{II}, \eta_{II}) \\ \vdots \\ v(\xi_{IX}, \eta_{IX}) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

を解けば係数列 $[a_1, a_2, \dots, a_9]$ は求まるので, 速度分布 (3.20) を 9 つの求積点上の値でまとめた行列式,

$$\begin{bmatrix} v(\xi_i, \eta_i) \\ v(\xi_{ii}, \eta_{ii}) \\ \vdots \\ v(\xi_{ix}, \eta_{ix}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^I(\xi_i, \eta_i) & N^{II}(\xi_i, \eta_i) & \cdots & N^{IX}(\xi_i, \eta_i) \\ N^I(\xi_{ii}, \eta_{ii}) & N^{II}(\xi_{ii}, \eta_{ii}) & \cdots & N^{IX}(\xi_{ii}, \eta_{ii}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N^I(\xi_{ix}, \eta_{ix}) & N^{II}(\xi_{ix}, \eta_{ix}) & \cdots & N^{IX}(\xi_{ix}, \eta_{ix}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(\xi_I, \eta_I) \\ v(\xi_{II}, \eta_{II}) \\ \vdots \\ v(\xi_{IX}, \eta_{IX}) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

を構成する成分 N のことを内挿関数, あるいは形状関数という. この節点 j から要素内の点 i へ写像する形状関数を便宜的に

$$\Phi = \begin{bmatrix} N_I & N_{II} & \cdots & N_{IX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ P_{ii} \\ \vdots \\ P_{ix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots & \phi_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

と置く. 式 (3.22) を解いて求まる内挿関数を Table. 3.1 に示す (久田・野口, 2002, pp. 111).

さまざまな形状の要素に対する内挿関数は実空間の座標において上記のプロセスを行えばよいが, 一般的には, 座標変換を用いて自然座標空間 (Fig. 3.2(a)) から実空間 (Fig. 3.2(b)) へ写像する. 式 (3.20) は内挿関数を用いて,

$$v(\xi, \eta) = \sum_{j=I}^{IX} N^j(\xi_j, \eta_j) v(\xi_j, \eta_j) \quad (3.24)$$

と表される. 偏微分方程式 (2.10) ~ (2.12) を解くためには, 変数 v の偏微分が必要である. これも, 内挿関数を用いれば,

$$\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{j=I}^{IX} \frac{\partial N^j(\xi_j, \eta_j)}{\partial \xi} v(\xi_j, \eta_j) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{j=I}^{IX} \frac{\partial N^j(\xi_j, \eta_j)}{\partial \eta} v(\xi_j, \eta_j) \quad (3.26)$$

Table 3.1: A shape function for the element structured by 3×3 nodal points.

Node number	Shape function
I	$N^I = 0.25(1 - \xi)(1 - \eta)\xi\eta$
II	$N^{II} = -0.5(1 - \xi^2)(1 - \eta)\eta$
III	$N^{III} = -0.5(1 - \eta^2)(1 - \xi)\xi$
IV	$N^{IV} = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$
V	$N^V = -0.25(1 + \xi)(1 - \eta)\xi\eta$
VI	$N^{VI} = -0.25(1 - \xi)(1 + \eta)\xi\eta$
VII	$N^{VII} = 0.5(1 - \eta^2)(1 + \xi)\xi$
VIII	$N^{VIII} = 0.5(1 - \xi^2)(1 + \eta)\eta$
IX	$N^{IX} = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)\xi\eta$

である. ここで, 実空間上での変数 v の偏微分は行列式を用いて

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

であり, 位置 (x, z) に関しても

$$x = \sum_{j=I}^{IX} N^j x_j \quad (3.28)$$

$$z = \sum_{j=I}^{IX} N^j z_j \quad (3.29)$$

であるから, 式 (3.27) の変換マトリクスは,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^I}{\partial \xi} & \frac{\partial N^{II}}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N^{IX}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^I}{\partial \eta} & \frac{\partial N^{II}}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N^{IX}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I & z_I \\ x_{II} & z_{II} \\ \vdots & \vdots \\ x_{IX} & z_{IX} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

によって計算できる (田中ら, 1996, pp. 24). ここで行列 J をヤコビアン行列と呼ぶ. 関数 $f(x, y)$ の積分は, 式 (3.19) とヤコビアン行列から,

$$\begin{aligned} \int \int f(x, z) dx dz &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{f(\xi, \eta) \det J\} d\xi d\eta \\ &= 4 \sum_{i=I}^{IX} [q_i f(\xi_i, \eta_i) \det J_i] \end{aligned} \quad (3.31)$$

そして、形状関数の偏微分は、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x} \end{bmatrix} = J_i^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

で計算される。

3.3.2 構成則 (フックの法則) による応力のアップデートスキーム

本節では、ある時刻における変位分布から求積点上の少し進んだ時刻における応力を計算するスキームを導出する。まず構成則 (2.10) ~ (2.12) を Fig. 3.2(b) に従い、右辺を節点上に記憶されている時刻 t の変位から内挿した求積点 i 上での値とする場合、FEM における内挿関数によって、それら 3 式は、

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^t(x_i, z_i)}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial P_i}{\partial x} V_x^t + \lambda \frac{\partial P_i}{\partial z} V_z^t \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^t(x_i, z_i)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial P_i}{\partial x} V_x^t + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial P_i}{\partial z} V_z^t \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^t(x_i, z_i)}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} V_x^t + \frac{\partial P_i}{\partial x} V_z^t \right) \quad (3.35)$$

ここで、

$$V_k^t = \begin{bmatrix} v_k^t(x_I, z_I) \\ v_k^t(x_{II}, z_{II}) \\ v_k^t(x_{III}, z_{III}) \\ v_k^t(x_{IV}, z_{IV}) \\ v_k^t(x_V, z_V) \\ v_k^t(x_{VI}, z_{VI}) \\ v_k^t(x_{VII}, z_{VII}) \\ v_k^t(x_{VIII}, z_{VIII}) \\ v_k^t(x_{IX}, z_{IX}) \end{bmatrix}, \quad (k = x, z) \quad (3.36)$$

である。次に、式 (3.33) ~ (3.35) の左辺の時間微分を離散化する。一般的に時間に対する離散化は、FEM においても差分法を用いる。時間 t まわりで、中心差分を利用し、

$$\frac{\sigma_{xx}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{xx}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial P_i}{\partial x} V_x^t + \lambda \frac{\partial P_i}{\partial z} V_z^t \quad (3.37)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{zz}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} = \lambda \frac{\partial P_i}{\partial x} V_x^t + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial P_i}{\partial z} V_z^t \quad (3.38)$$

$$\frac{\sigma_{xz}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{xz}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} = \mu \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} V_x^t + \frac{\partial P_i}{\partial x} V_z^t \right) \quad (3.39)$$

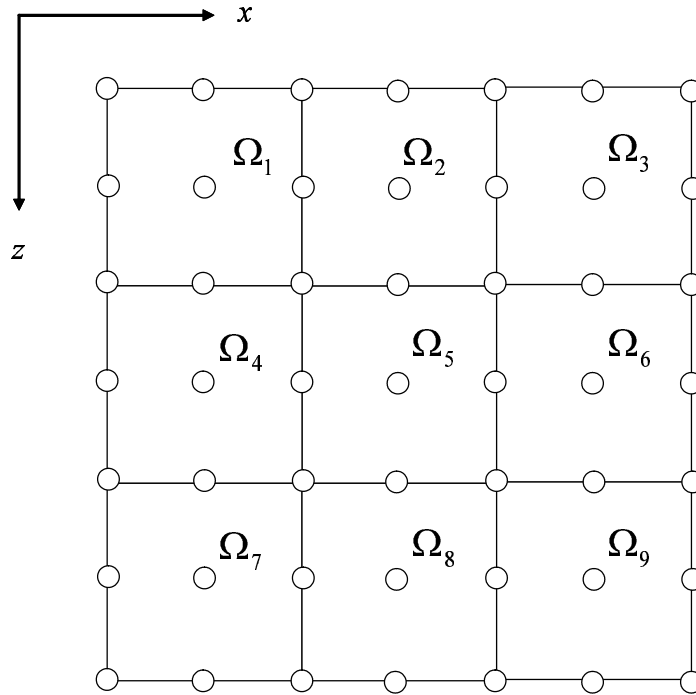


Fig. 3.3: Elastic body consisting of nine elements. Open circles are nodal points.

である. これが FEM に関する本研究の, 時刻 $t - \Delta t/2$ における応力と時刻 t における粒子速度から時刻 $t + \Delta t/2$ における応力をアップデートする計算スキームとなる.

3.3.3 ガラーキン法

運動方程式 (2.13), (2.14) をオイラーの運動方程式あるいは, 強形の運動方程式と呼ぶ. 実際は Fig. 3.3 のような, 体積が定義された空間において運動方程式を組み立てているはずであり, 弾性体における運動方程式も強形の運動方程式を導くより先に,

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \rho f_x - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (3.40)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \rho f_z - \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (3.41)$$

という積分型の運動方程式が導出される (安芸・リチャーズ, 2004, pp. 22). これをラグランジュの運動方程式あるいは弱形の運動方程式と呼ぶ. 有限要素法はこの積分型の運動方程式を解くため, 差分法に対して体積法と呼ばれることもある.

さて, 式 (3.40), (3.41) の代わりに, 式 (2.13), (2.14) に任意のスカラー関数 ϕ_x, ϕ_z を

掛けても積分型方程式

$$\int_{\Omega} \phi_x \left\{ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \rho f_x - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega} \phi_z \left\{ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \rho f_z - \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (3.43)$$

は成立する. この式 (3.42), (3.43) を重み付き残差式と呼ぶ. そして, 離散的に配置された点上の変位などの値を全ての空間における連続的な関数として補間するための汎関数となるように作爲的に ϕ を選んで有限要素法を解く手法を重み付き残差法と呼ぶ. 次に, 式 (3.42), (3.43) は部分積分 (式 (3.42), (3.43) をベクトル表記すればガウスの発散定理) を利用してそれぞれ

$$\int_{\Omega} \phi_x \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial \phi_x}{\partial z} \sigma_{xz} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \phi_x \rho f_x d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_x (\tau_{xx} + \tau_{xz}) d\Gamma \quad (3.44)$$

$$\int_{\Omega} \phi_z \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \sigma_{zz} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \phi_z \rho f_z d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_z (\tau_{xz} + \tau_{zz}) d\Gamma \quad (3.45)$$

と変形される. Γ は領域 Ω を囲っている境界である. $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}$ は領域境界にかかる外圧である. ここで, もし, ϕ を節点上で単位量の変位のがあった場合の内挿を表す関数であるとみなせば, 式 (3.44) と (3.45) の両辺の和は仮想仕事の原理である. つまり,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta u_x \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta u_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial \delta u_x}{\partial z} \sigma_{xz} \right) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \delta u_x \rho f_x d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u_x (\tau_{xx} + \tau_{xz}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta u_z \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta u_z}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} \sigma_{zz} \right) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \delta u_z \rho f_z d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u_z (\tau_{xz} + \tau_{zz}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.47)$$

となるように, ϕ を δu として選べば, 左辺が内部エネルギー (運動エネルギー + ひずみエネルギー) 増分で右辺が外力仕事 (体積力が為した仕事 + 境界にかかる力が為した仕事) である. この関係を利用し, ϕ を試行錯誤することなく, 仮想変位の分布として与え, FEM を解く手法をガラーキン法という. その仮想変位の分布は, 式 (3.23) で求めた内挿関数と同じ方法で求まる. 即ち, ガラーキン法とは重み付き残差法の重み関数に内挿関数を用いる FEM を指す.

ただし, 計算上の (= 離散的な) 空間において式 (3.44), (3.45) をこの仮想仕事の原理と一致させるためには u_x と u_z を同じ点に配置する必要がある. つまり,

$$\delta u_x = \delta u_z = \phi_x = \phi_z = \phi \quad (3.48)$$

となるために, u_x と u_z が同じ点上で定義する必要がある. もっとも, Fig. 3.2(a) のように, v_x と v_z は同じ点上で定義するのが通常である.

3.3.4 運動方程式による粒子速度のアップデートスキーム

続いて, ある時刻における応力分布から節点上の少し進んだ時刻における粒子速度を計算するスキームを導出する. これには, 重み付き残差式 (3.42), (3.43) を節点上で離散化すればよい.

加速度項と集中化質量マトリクス

まず, 式 (3.44) の左辺第一項について説明する. 式 (3.44) の左辺第一項は

$$\int_{\Omega} \phi \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\Omega} \left[4 \sum_{i=1}^9 [q_i P_i^T \rho P_i \det J_i V_x^t] \right] \quad (3.49)$$

と空間的に離散化できる. 記号 T は, 行列の転置を意味する. ここで右辺を説明する. Fig. 3.2(a) のグリッド配置をもとに, 積分の変換式 (3.31) を適用した. $P_i V_x(t)$ は求積点 i 上での粒子速度である. これに密度とガウス・ルジャンドル求積点の重み q_i を掛け, さらに, 内挿関数を重み関数とみなせるので, これを利用して P_i^T を掛けることで, 再び節点上に粒子速度と密度を掛けた量を振り分ける (離散化する). 最後に, 要素内で行われる計算を全領域 Ω について足し合わせている. そして式 (3.49) の右辺は内側のシグマ演算から V_x^t を外すことができる. 即ち,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\Omega} \left[4 \sum_{i=1}^9 [q_i P_i^T \rho P_i \det J_i] V_x^t \right] \quad (3.50)$$

と展開できる. ここで,

$$M = 4 \sum_{i=1}^9 [q_i P_i^T \rho P_i \det J_i] = \begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots & m_{j_1 j_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad j_1, j_2 = \text{I, II}, \dots, \text{IX} \quad (3.51)$$

とおき, これを要素質量マトリクスと呼ぶ. 動的な計算を行うに当たっては, あらかじめ節点上に要素質量マトリクスを集中化する. つまり,

$$\bar{M} = \left[\sum_{j_2=1}^{\text{IX}} m_{\text{I}j_2}, \sum_{j_2=1}^{\text{IX}} m_{\text{II}j_2}, \dots, \sum_{j_2=1}^{\text{IX}} m_{\text{IX}j_2} \right] = [\cdots, \bar{m}_{j_1}, \cdots], \quad j_1 = \text{I, II}, \dots, \text{IX} \quad (3.52)$$

という節点上に集中化された質量 \bar{M} を用いて式 (3.49) は

$$\int_{\Omega} \phi \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\Omega} [\bar{M} V_x(t)] \quad (3.53)$$

と変形される. このとき \bar{M} を集中化質量マトリクス (Lumped mass matrix) とよぶ.

応力項

次に, 式 (3.44) の左辺第二項にも, 積分の変換式 (3.31) を適用し

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \sigma_{xz} \right) d\Omega = \\ & \sum_{\Omega} \left[4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \right)^T \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \right)^T \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

と空間的に離散化できる.

外力項

式 (3.44) の右辺は, 節点にかかる等価な外力として集約される. 即ち,

$$\int_{\Omega} \phi \rho f_x d\Omega + \int_{\Gamma} \phi (\tau_{xx} + \tau_{xz}) d\Gamma = \sum_{\Omega} F_x \quad (3.55)$$

と置き換えてしまう. この外加速度と外面積力の他にも, 点外力や変位固定境界 (ディリクレ境界) などを扱う必要があるが, これらは全て, 内挿関数 ϕ_{ij} を用いて等価節点外力 (ペナルティ力) として物理的に置き換えることができる. これをペナルティ法とよび, 動的解析においては計算コストを節約する重要なテクニックである. 内挿関数を用いたペナルティ力の算出方法については, 例えば, Lu et al., (1995) を参照されたい. 本論文のような人工的な起振力を扱う問題は, 既知外力を入力とする. 波動伝播問題は, 体積力, 面積力, 固定変位などの境界は考慮しない場合が多い. むしろ, 無限遠への接続を意味する吸収境界への興味が高い分野といえる.

運動方程式の時間的離散化

以上のようにして、重み付き残差式 (3.44) は空間的にと離散化されたわけである。同様に式 (3.43) のそれと共に記す。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\Omega} [\bar{M}V_x] + \\ & \sum_{\Omega} \left[4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \right)^T \sigma_{xx}(x_i, z_i) + \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \right)^T \sigma_{xz}(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \right] = \sum_{\Omega} F_x \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\Omega} [\bar{M}V_z] + \\ & \sum_{\Omega} \left[4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \right)^T \sigma_{xz}(x_i, z_i) + \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \right)^T \sigma_{zz}(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \right] = \sum_{\Omega} F_z \end{aligned} \quad (3.57)$$

である。これら式 (3.56), (3.57) とフックの法則である式 (3.37) ~ (3.39) を全計算領域で合成すると、FEM では良く知られた離散的運動方程式

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.58)$$

という形に集約される。K は剛性マトリクスである。

しかし、本論文では式 (3.58) を利用せず、式 (3.56), (3.57) のまま計算を行うことにした。剛性マトリクスを作らない方が、計算メモリを節約できるからである。従って、式 (3.56), (3.57) を時間 t を中心に離散化 (中心差分) して、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \sum_{\Omega} [\bar{M} (V_x^{t+\Delta t/2} - V_x^{t-\Delta t/2})] + \\ & \sum_{\Omega} \left[4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \right)^T \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \right)^T \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \right] = \sum_{\Omega} F_x^t \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \sum_{\Omega} [\bar{M} (V_z^{t+\Delta t/2} - V_z^{t-\Delta t/2})] + \\ & \sum_{\Omega} \left[4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \left(\frac{\partial P_i}{\partial x} \right)^T \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \left(\frac{\partial P_i}{\partial z} \right)^T \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \right] = \sum_{\Omega} F_z^t \end{aligned} \quad (3.60)$$

が運動方程式によって応力から粒子速度をアップデートするスキームとなる。最後に Ω による加算を処理する。Fig. 3.3 を見てもわかる通り、I から IX の節点は、隣り合

う要素によってさまざまに共有されている. たとえば, 要素 Ω_5 を中心に考えると

$$\begin{aligned}
 U(\text{I}) \text{ of } \Omega_5 &= U(\text{V}) \text{ of } \Omega_4 \\
 &= U(\text{VI}) \text{ of } \Omega_2 \\
 &= U(\text{IX}) \text{ of } \Omega_1 \\
 U(\text{II}) \text{ of } \Omega_5 &= U(\text{VIII}) \text{ of } \Omega_2 \\
 U(\text{III}) \text{ of } \Omega_5 &= U(\text{VII}) \text{ of } \Omega_4
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

というように節点は共有されている. これを利用して, 式 (3.59), (3.60) の計算スキームを式 (3.61) に示した節点 I から III, さらに要素によって独立な節点 IV を加えた都合 4 通りの場合わけによって, Ω による加算の処理を行う.

まず, 式 (3.59) を節点 I について, Ω の処理をすると,

$$\begin{aligned}
 &(\bar{m}_\text{I} + \bar{m}_\text{V} + \bar{m}_\text{VI} + \bar{m}_\text{IX}) \frac{v_x^{t+\Delta t/2}(x_\text{I}, z_\text{I}) - v_x^{t-\Delta t/2}(x_\text{I}, z_\text{I})}{\Delta t} + \\
 &4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{I}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{I}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
 &4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{V}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{V}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
 &4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VI}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{VI}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
 &4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{IX}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{IX}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_x^t(x_\text{I}, z_\text{I}) \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

となる. 同様に節点 II, III, IV についても

$$\begin{aligned}
 & (\bar{m}_{\text{II}} + \bar{m}_{\text{VIII}}) \frac{v_x^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) - v_x^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{\Delta t} + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{II}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{II}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VIII}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{VIII}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_x^t(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\bar{m}_{\text{III}} + \bar{m}_{\text{VII}}) \frac{v_x^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) - v_x^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{\Delta t} + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{III}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{III}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VII}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i, t) + \frac{\partial \phi_{i\text{VII}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_x^t(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{m}_{\text{IV}} \frac{v_x^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) - v_x^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{\Delta t} + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{IV}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{IV}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_x^t(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

である. 同様に, 式 (3.60) についても

$$\begin{aligned}
 & (\bar{m}_{\text{I}} + \bar{m}_{\text{V}} + \bar{m}_{\text{VI}} + \bar{m}_{\text{IX}}) \frac{v_z^{t+\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}}) - v_z^{t-\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}})}{\Delta t} + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{I}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{I}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{V}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{V}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VI}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{VI}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
 & 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{IX}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{IX}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_z^t(x_{\text{I}}, z_{\text{I}}) \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{II}} + \bar{m}_{\text{VIII}}) \frac{v_z^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) - v_z^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{\Delta t} + \\
& 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{II}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{II}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
& 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VIII}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{VIII}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_z^t(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) \quad (3.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{III}} + \bar{m}_{\text{VII}}) \frac{v_z^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) - v_z^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{\Delta t} + \\
& 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{III}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{III}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + \\
& 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VII}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{VII}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_z^t(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) \quad (3.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{m}_{\text{IV}} \frac{v_z^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) - v_z^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{\Delta t} + \\
& 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{IV}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) + \frac{\partial \phi_{i\text{IV}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_z^t(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) \quad (3.69)
\end{aligned}$$

である。これにより節点の共有関係を利用して、要素すべてに9つの節点を設けるのではなく、上に示した4つの場合わけの中からどれかを選んで、粒子速度をアップデートすればよい。Fig. 3.4 に計算フローチャートを示す。

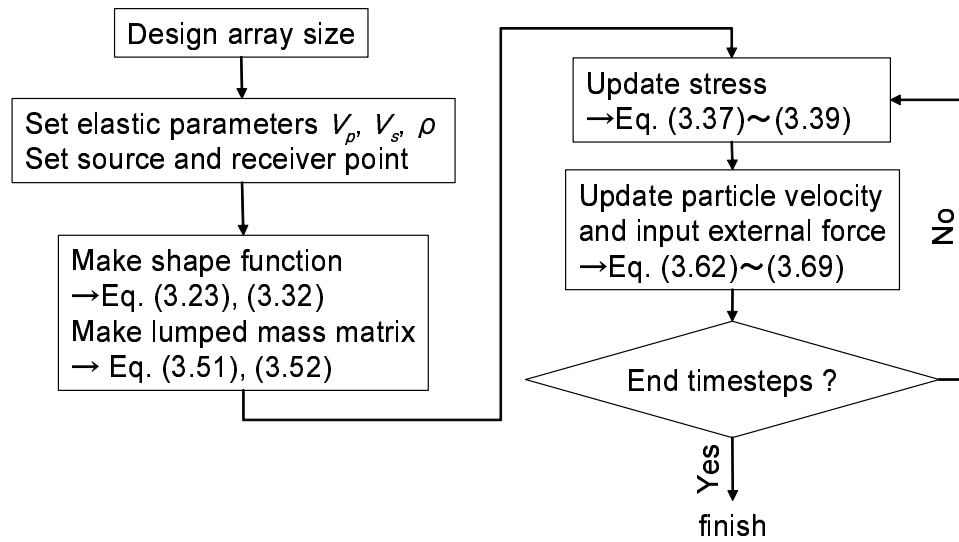


Fig. 3.4: The flow chart of 2D FEM computation.

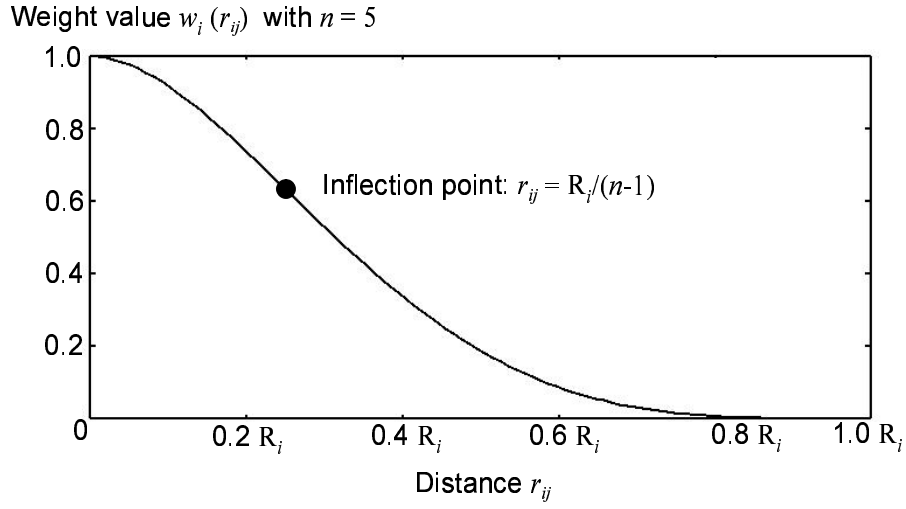


Fig. 3.5: A weight function for moving least square. This graph is obtained by Eq. (3.70) with $n = 5$

3.4 エlementフリーガラーキン法

Elementフリーガラーキン法 (EFGM: Element Free Galerkin method) は, Belytschko, et al.(1994) によって提唱され, 目的として材料破壊などをシミュレートするために作られた. EFGM は移動最小二乗法により内挿関数を導く FEM である. 著者は, 巧く重み関数を選べば, FEM の計算精度が向上すると考え, 本研究に導入した.

3.4.1 Elementフリーガラーキン法の内挿関数

移動最小二乗法 (MLS: Moving Least Squares) を用いて内挿関数を作る. まず, Fig. 3.2(a) の 9 個ある求積点のそれぞれを中心に重み関数

$$\begin{aligned} w_i(r_{ij}) &= n_a \frac{r_{ij}}{R_i} \left(1 - \frac{r_{ij}}{R_i}\right)^{n_a-1} + \left(1 - \frac{r_{ij}}{R_i}\right)^{n_a} & 0 < r_{ij} \leq R_i \\ w_i(r_{ij}) &= 0 & R_i < r_{ij} \end{aligned} \quad (3.70)$$

を設計する. ここで, r_{ij} は,

$$r_{ij} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (3.71)$$

で, 求積点 i と節点 j 間の距離である. R_i は影響半径と呼ばれ, 要素の全ての節点がこの影響半径内に収まるように設計する. そして

$$n_a = 5 \quad (3.72)$$

$$R_{i=iv} = 1.6 \quad (3.73)$$

$$R_{i=ii,iii,vii,viii} = 2.2 \quad (3.74)$$

$$R_{i=i,v,vi,ix} = 2.6 \quad (3.75)$$

とした. これらの定数は, n_a については ± 1 , R については ± 0.1 だけ式 (3.72) ~ (3.75) から変化させたときの最終的な波動伝播の計算結果の比較から, 最も精度の良いものとして提案する. この関数 (3.70) 以外の重み関数でも良いが, 式 (3.70) を r_{ij} で微分すると

$$\frac{dw_i}{dr_{ij}} = -\frac{1}{R_i} n_a (n_a - 1) \frac{r_{ij}}{R_i} \left(1 - \frac{r_{ij}}{R_i}\right)^{n_a-2} \quad (3.76)$$

$$\frac{d^2 w_i}{dr_{ij}^2} = -\left(\frac{1}{R_i}\right)^2 n_a (n_a - 1) \frac{r_{ij}}{R_i} \left\{1 - (n_a - 1) \frac{r_{ij}}{R_i}\right\} \left(1 - \frac{r_{ij}}{R_i}\right)^{n_a-3} \quad (3.77)$$

となることからわかるように, $r_{ij} = R_i / (n_a - 1)$ を変曲点とする扱いやすさから, これを本研究では重み関数として使用する. Fig. 3.5 に $n_a = 5$ での関数 (3.70) を示す.

以上のようにして決められた重み関数を用い, 次に, Fig. 3.2(a) にある要素で内挿関数を計算する. ガウス・ルジャンドルの区分求積法を適用できる多項式で内挿関数を作る. 従って, 求積点 i 上で

$$v(\xi_i, \eta_i) = a_0 + a_1 \xi_i + a_2 \eta_i + a_3 \xi_i \eta_i + a_4 \xi_i^2 + a_5 \eta_i^2 + a_6 \xi_i^2 \eta_i^2 \quad (3.78)$$

によって変位をする. この基底の選び方も一意に決まるわけではなく, 節点は9つあるので, $\xi_i^2 \eta_i$, $\xi_i \eta_i^2$ も利用可能である. この問題については次節で検討する. ここで,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & (-1)(-1) & (-1)^2 & (-1)^2 & (-1)^2(-1)^2 \\ 1 & 0 & -1 & (0)(-1) & (0)^2 & (-1)^2 & (0)^2(-1)^2 \\ 1 & -1 & 0 & (-1)(0) & (-1)^2 & (0)^2 & (-1)^2(0)^2 \\ 1 & 0 & 0 & (0)(0) & (0)^2 & (0)^2 & (0)^2(0)^2 \\ 1 & 1 & -1 & (1)(-1) & (1)^2 & (-1)^2 & (1)^2(-1)^2 \\ 1 & -1 & 1 & (-1)(1) & (-1)^2 & (1)^2 & (-1)^2(1)^2 \\ 1 & 1 & 0 & (1)(0) & (1)^2 & (0)^2 & (1)^2(0)^2 \\ 1 & 0 & 1 & (0)(1) & (0)^2 & (1)^2 & (0)^2(1)^2 \\ 1 & 0 & 1 & (1)(1) & (1)^2 & (1)^2 & (1)^2(1)^2 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\text{diag}[W_i] = [w_i(r_{iI}) \quad w_i(r_{iII}) \quad \cdots \quad w_i(r_{iIX})]^T \quad (3.80)$$

$$A = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]^T \quad (3.81)$$

$$V = \begin{bmatrix} v(-1, -1) \\ v(0, -1) \\ v(-1, 0) \\ v(0, 0) \\ v(1, -1) \\ v(-1, 1) \\ v(1, 0) \\ v(0, 1) \\ v(1, 1) \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

とおく. 式 (3.78) について,

$$W_i B A = V \quad (3.83)$$

という優決定の連立方程式が作られ, 移動最小二乗法 (例えば, メンケ, 1997, pp. 54) によって,

$$A = [B^T W_i B]^{-1} B^T W_i V \quad (3.84)$$

である. ゆえに式 (3.78) は

$$v(\xi_i, \eta_i) = [1 \ \xi_i \ \eta_i \ \xi_i \eta_i \ \xi_i^2 \ \eta_i^2 \ \xi_i^2 \eta_i^2] A \quad (3.85)$$

と表せる. ここで,

$$P_i = [1 \ \xi_i \ \eta_i \ \xi_i \eta_i \ \xi_i^2 \ \eta_i^2 \ \xi_i^2 \eta_i^2] [B^T W_i B]^{-1} B^T W_i \quad (3.86)$$

と置くと, 式 (3.84), (3.85) より,

$$v(\xi_i, \eta_i) = P_i V \quad (3.87)$$

と表せ, 求積点上で $v(\xi_i, \eta_i)$ が節点上の V から内挿される式となる. そして, 全ての求積点に対して計算した P_i が内挿関数 (3.23) を形成する.

内挿関数の偏微分

さて, 式 (3.87) から, 求積点上での変位は内挿関数の微分によって表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi_i, \eta_i)}{\partial x} &= \frac{\partial P_i}{\partial x} V \\ \frac{\partial v(\xi_i, \eta_i)}{\partial z} &= \frac{\partial P_i}{\partial z} V \end{aligned} \quad (3.88)$$

ここで, 式 (3.86) より,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_i}{\partial \xi} &= [0 \ 1 \ 0 \ \eta_i \ 2\xi_i \ 0 \ 2\xi_i\eta_i^2] [B^T W_i B]^{-1} B^T W_i \\
 &+ [1 \ \xi_i \ \eta_i \ \xi_i\eta_i \ \xi_i^2 \ \eta_i^2 \ \xi_i^2\eta_i^2] \left[B^T \frac{\partial W_i}{\partial \xi} B \right]^{-1} B^T W_i \\
 &+ [1 \ \xi_i \ \eta_i \ \xi_i\eta_i \ x_i^2 \ \eta_i^2 \ \xi_i^2\eta_i^2] [B^T W_i B]^{-1} B^T \frac{\partial W_i}{\partial \xi} \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_i}{\partial \eta} &= [0 \ 0 \ 1 \ \xi_i \ 0 \ 2\eta_i \ 2\xi_i^2\eta_i] [B^T W_i B]^{-1} B^T W_i \\
 &+ [1 \ \xi_i \ \eta_i \ \xi_i\eta_i \ \xi_i^2 \ \eta_i^2 \ \xi_i^2\eta_i^2] \left[B^T \frac{\partial W_i}{\partial \eta} B \right]^{-1} B^T W_i \\
 &+ [1 \ \xi_i \ \eta_i \ \xi_i\eta_i \ \xi_i^2 \ \eta_i^2 \ \xi_i^2\eta_i^2] [B^T W_i B]^{-1} B^T \frac{\partial W_i}{\partial \eta} \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \xi} = \frac{\partial W_i}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi} \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \eta} = \frac{\partial W_i}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \eta} \quad (3.92)$$

となる (Belytschko et al., 1994).

3.4.2 DEFGM(Decomposed Element Free Galerkin Method)

著者らは, 前節にて説明した剛性マトリクスを利用しない FEM に対して, 内挿関数を EFGM を利用して作成した (Katou et al., 2006b). この手法を本論文では, DEFGM(Decomposed Element Free Galerkin Method) と呼ぶことにし, 次節では, この DEFGM の計算精度を中心に議論する.

3.5 吸収境界条件

波動伝播問題のシミュレーションにおいて、最も重要な境界条件は吸収境界条件である。本節では、最も、適用が容易な Cerjan method (Cerjan et al., 1985) と現在、最も精度が良いとされる PML (たとえば, Collino and Tsogka, 2001; Festa and Nielsen, 2003) について説明する。

3.5.1 Cerjan method

Cerjan method は、吸収境界領域に入射した波の全応力成分、全粒子速度成分に対して減衰関数をかけることによって徐々にエネルギーを吸収していくものである。このため設計が容易であるという利点と吸収境界領域として余分に計算領域を取る必要があるという欠点を持つ。本研究では、減衰関数は

$$f(x) = e^{-\alpha x^2} \quad (3.93)$$

であり、パラメータとして、 $\alpha=0.015$ とし、吸収境界は計算領域の各境界面より 20 グリッドを吸収領域に設ける。計算機能力が十分であれば、これらのパラメータを調節することで、容易に精度を向上させることができる。

3.5.2 PML (Perfectly Matched Layer)

PML (Perfectly Matched Layer) 吸収境界は現在、最も精度の良い吸収境界として知られている。この PML を適用するために、構成則 (2.10) ~ (2.12) は

$$\frac{\partial \sigma_{xx-x}}{\partial t} + d(x') \sigma_{xx-x} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx-z}}{\partial t} + d(z') \sigma_{xx-z} = \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz-x}}{\partial t} + d(x') \sigma_{zz-x} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz-z}}{\partial t} + d(z') \sigma_{zz-z} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz-x}}{\partial t} + d(x') \sigma_{xz-x} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz-z}}{\partial t} + d(z') \sigma_{xz-z} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (3.99)$$

と変形して使用する。ここで、

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx-x} + \sigma_{xx-z} \quad (3.100)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz-x} + \sigma_{zz-z} \quad (3.101)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz-x} + \sigma_{xz-z} \quad (3.102)$$

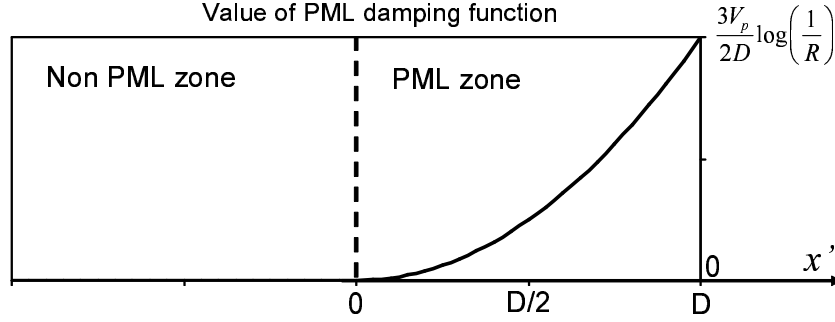


Fig. 3.6: Value of PML damping function (3.103).

である。これを方向分離法 (directional splitting) という。式 (3.94) ~ (3.99) の関数 $d(x')$, $d(z')$ は応力の時間微分と連立しているので粘性減衰を与えるパラメータとして解釈できる。つまり, PML は波の進行方向に対して, 人工的な粘性を与えて波の振幅を小さくするというメカニズムなのである。ここで, 我々の使用する減衰関数 $d(x')$, $d(z')$ は,

$$d(x') = \frac{3V_p}{2D} \log\left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{x'}{D}\right)^2 \quad (3.103)$$

$$d(z') = \frac{3V_p}{2D} \log\left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{z'}{D}\right)^2 \quad (3.104)$$

である。ここで, D は PML 層厚, R は PML 層内の層間での反射係数で十分に小さい値を代入する (本研究では $R = 1000$ とした)。Fig. 3.6 に式 (3.103) をプロットした。 x' , z' はそれぞれ x 方向と z 方向に, 計算領域から PML 層に入り, そこからの距離を示す。

前に紹介した文献に, 差分法への PML の適用は良く記されているので, ここでは, FEM への適用について説明する。計算スキーム (3.37) ~ (3.39) は,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx-x}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{xx-x}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} + d(x') \frac{\sigma_{xx-x}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) + \sigma_{xx-x}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{2} \\ = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial P_i}{\partial x} V_x^t \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx-z}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{xx-z}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} + d(x') \frac{\sigma_{xx-z}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) + \sigma_{xx-z}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{2} \\ = \lambda \frac{\partial P_i}{\partial z} V_z^t \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\frac{\sigma_{zz-x}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{zz-x}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} + d(x') \frac{\sigma_{zz-x}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) + \sigma_{zz-x}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{2} = \lambda \frac{\partial P_i}{\partial x} V_x^t \quad (3.107)$$

$$\frac{\sigma_{zz-z}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{zz-z}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} + d(x') \frac{\sigma_{zz-z}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) + \sigma_{zz-z}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial P_i}{\partial z} V_z^t \quad (3.108)$$

$$\frac{\sigma_{xz-x}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{xz-x}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} + d(x') \frac{\sigma_{xz-x}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) + \sigma_{xz-x}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{2} = \mu \frac{\partial P_i}{\partial x} V_z^t \quad (3.109)$$

$$\frac{\sigma_{xz-z}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) - \sigma_{xz-z}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{\Delta t} + d(x') \frac{\sigma_{xz-z}^{t+\Delta t/2}(x_i, z_i) + \sigma_{xz-z}^{t-\Delta t/2}(x_i, z_i)}{2} = \mu \frac{\partial P_i}{\partial z} V_x^t \quad (3.110)$$

と変形される. 左辺第二項の時間的離散化については, 時間平均をとって.

同様に, 運動方程式 (3.44), (3.45) についても

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \rho \left\{ \frac{\partial v_{x-x}}{\partial t} + d(x') v_{x-x} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \sigma_{xx} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \phi \rho f_{x-x} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi (\tau_{xx-x} + \tau_{xz-x}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \rho \left\{ \frac{\partial v_{x-z}}{\partial t} + d(z') v_{x-z} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial z} \sigma_{xz} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \phi \rho f_{x-z} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi (\tau_{xx-z} + \tau_{xz-z}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \rho \left\{ \frac{\partial v_{z-x}}{\partial t} + d(x') v_{z-x} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \sigma_{xz} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \phi \rho f_{z-x} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi (\tau_{xz-x} + \tau_{zz-x}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \rho \left\{ \frac{\partial v_{z-z}}{\partial t} + d(z') v_{z-z} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial z} \sigma_{zz} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \phi \rho f_{z-z} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi (\tau_{xz-z} + \tau_{zz-z}) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.114)$$

と変形させる. ここで,

$$v_x = v_{x-x} + v_{x-z} \quad (3.115)$$

$$v_z = v_{z-x} + v_{z-z} \quad (3.116)$$

$$f_x = f_{x-x} + f_{x-z} \quad (3.117)$$

$$f_z = f_{z-x} + f_{z-z} \quad (3.118)$$

$$\tau_{xx} = \tau_{xx-x} + \tau_{xx-z} \quad (3.119)$$

$$\tau_{zz} = \tau_{zz-x} + \tau_{zz-z} \quad (3.120)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz-x} + \tau_{xz-z} \quad (3.121)$$

である. そして, 計算スキーム (3.62) ~ (3.69) についても

$$\begin{aligned} & (\bar{m}_I + \bar{m}_V + \bar{m}_{VI} + \bar{m}_{IX}) \left(\frac{v_{x-x}^{t+\Delta t/2}(x_I, z_I) - v_{x-x}^{t-\Delta t/2}(x_I, z_I)}{\Delta t} \right. \\ & \left. + d(x') \frac{v_{x-x}^{t+\Delta t/2}(x_I, z_I) + v_{x-x}^{t-\Delta t/2}(x_I, z_I)}{2} \right) \\ & + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{iI}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{iV}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\ & + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{iVI}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{iIX}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\ & = F_{x-x}^t(x_I, z_I) \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} & (\bar{m}_I + \bar{m}_V + \bar{m}_{VI} + \bar{m}_{IX}) \left(\frac{v_{x-z}^{t+\Delta t/2}(x_I, z_I) - v_{x-z}^{t-\Delta t/2}(x_I, z_I)}{\Delta t} \right. \\ & \left. + d(z') \frac{v_{x-z}^{t+\Delta t/2}(x_I, z_I) + v_{x-z}^{t-\Delta t/2}(x_I, z_I)}{2} \right) \\ & + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{iI}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{iV}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\ & + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{iVI}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{iIX}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\ & = F_{x-z}^t(x_I, z_I) \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{II}} + \bar{m}_{\text{VIII}}) \left(\frac{v_{x-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) - v_{x-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{\Delta t} \right. \\
& \left. + d(x') \frac{v_{x-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) + v_{x-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{II}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VIII}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{x-x}^t(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})
\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{II}} + \bar{m}_{\text{VIII}}) \left(\frac{v_{x-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) - v_{x-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{\Delta t} \right. \\
& \left. + d(z') \frac{v_{x-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) + v_{x-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{II}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VIII}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{x-z}^t(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})
\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{III}} + \bar{m}_{\text{VII}}) \left(\frac{v_{x-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) - v_{x-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{\Delta t} \right. \\
& \left. + d(x') \frac{v_{x-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, x_{\text{III}}) + v_{x-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{III}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VII}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{x-x}^t(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})
\end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{III}} + \bar{m}_{\text{VII}}) \left(\frac{v_{x-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) - v_{x-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{T} \right. \\
& \left. + d(z') \frac{v_{x-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) + v_{x-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{III}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VII}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{x-z}^t(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})
\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{IV}}) \left(\frac{v_{x-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) - v_{x-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{\Delta t} \right. \\
& \quad \left. + d(x') \frac{v_{x-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) + v_{x-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{III}}}{\partial x} \sigma_{xx}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_{x-x}^t(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) \quad (3.128)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{IV}}) \left(\frac{v_{x-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) - v_{x-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{\Delta t} \right. \\
& \quad \left. + d(z') \frac{v_{x-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) + v_{x-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{IV}}}{\partial z} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_{x-z}^t(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) \quad (3.129)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{I}} + \bar{m}_{\text{V}} + \bar{m}_{\text{VI}} + \bar{m}_{\text{IX}}) \left(\frac{v_{z-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}}) - v_{z-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}})}{\Delta t} \right. \\
& \quad \left. + d(x') \frac{v_{z-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}}) + v_{z-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{I}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{V}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VI}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{IX}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{z-x}^t(x_{\text{I}}, z_{\text{I}}) \quad (3.130)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{I}} + \bar{m}_{\text{V}} + \bar{m}_{\text{VI}} + \bar{m}_{\text{IX}}) \left(\frac{v_{z-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}}) - v_{z-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}})}{\Delta t} \right. \\
& \quad \left. + d(z') \frac{v_{z-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}}) + v_{z-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{I}}, z_{\text{I}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{I}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{V}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{VI}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{IX}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{z-z}^t(x_{\text{I}}, z_{\text{I}}) \quad (3.131)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{II}} + \bar{m}_{\text{VIII}}) \left(\frac{v_{z-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) - v_{z-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{\Delta t} \right. \\
& \left. + d(x') \frac{v_{z-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) + v_{z-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{\text{III}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{\text{VIII}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{z-x}^t(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})
\end{aligned} \tag{3.132}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{II}} + \bar{m}_{\text{VIII}}) \left(\frac{v_{z-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) - v_{z-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{\Delta t} \right. \\
& \left. + d(z') \frac{v_{z-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}}) + v_{z-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{\text{III}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{\text{VIII}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{z-z}^t(x_{\text{II}}, z_{\text{II}})
\end{aligned} \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{III}} + \bar{m}_{\text{VII}}) \left(\frac{v_{z-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) - v_{z-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{\Delta t} \right. \\
& \left. + d(x') \frac{v_{z-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, x_{\text{III}}) + v_{z-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{\text{III}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{\text{VII}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{z-x}^t(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})
\end{aligned} \tag{3.134}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{III}} + \bar{m}_{\text{VII}}) \left(\frac{v_{z-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) - v_{z-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{T} \right. \\
& \left. + d(z') \frac{v_{z-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}}) + v_{z-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{\text{III}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{\text{VII}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] \\
& = F_{z-z}^t(x_{\text{III}}, z_{\text{III}})
\end{aligned} \tag{3.135}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{IV}}) \left(\frac{v_{z-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) - v_{z-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{\Delta t} \right. \\
& \left. + d(x') \frac{v_{z-x}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) + v_{z-x}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{III}}}{\partial x} \sigma_{xz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_{z-x}^t(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) \quad (3.136)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{m}_{\text{IV}}) \left(\frac{v_{z-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) - v_{z-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{\Delta t} \right. \\
& \left. + d(z') \frac{v_{z-z}^{t+\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) + v_{z-z}^{t-\Delta t/2}(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}})}{2} \right) \\
& + 4 \sum_{i=1}^9 \left[q_i \left\{ \frac{\partial \phi_{i\text{IV}}}{\partial z} \sigma_{zz}^t(x_i, z_i) \right\} \det J_i \right] = F_{z-z}^t(x_{\text{IV}}, z_{\text{IV}}) \quad (3.137)
\end{aligned}$$

となる。ただし等価節点外力についても

$$\begin{aligned}
F_x &= F_{x-x} + F_{x-z} \\
F_z &= F_{z-x} + F_{z-z} \quad (3.138)
\end{aligned}$$

であるが、与え方の比率は計算上任意でかまわない。つまり、 $F_z = 1$ と入力する場合は、 $F_{x-x} = F_{x-z} = 0.5$ としても、 $F_{x-x} = 1$, $F_{x-z} = 0$ としても計算上は同じである。

3.6 計算結果の比較

本節では, DEFGM の計算精度や計算時間を, 解析解や FDM4(4 次精度スタガード格子差分法) や FEM の計算結果と比較することによって評価する.

3.6.1 安定条件

実用上妥当なシミュレーション結果を得るために, 最も短い S 波の波長とグリッド分散の関係を議論すべきである (Marfurt, 1988). 差分法の場合, Levander(1988) の Image method を使った時, 最短 S 波長に対して, 8 グリッドあれば十分とされます (Bohlen and Saenger, 2006). したがって, 本論文の数値計算は, この値を中心に精度の研究や, 工学的応用が成されるでしょう.

時間領域の数値計算全般に, グリッド間隔 $\Delta x = \Delta z$ の時, サンプリング間隔は,

$$\Delta t < \frac{c\Delta x}{\max\{V_p\}} \quad (3.139)$$

で決定される. $\max\{V_p\}$ は媒体中の最大 P 波速度です. ここで, c をクーラン数とよび, 2 次元差分法の時, $c = 1/\sqrt{2}$ である (Virieux, 1986). 著者は, FEM に関して実験的に評価したところ, $c=0.80$ であった. これは, Koketsu et al., (2004) と同じである.

3.6.2 PS 反射波

P 波震源からの直接 P 波, PP 反射波, PS 反射波の解析解 (EXE2DELEL) が, SPICE Homepage (<http://www.spice-rtn.org>) より入手できる. これを利用して DEFGM と FDM4 の計算精度を比較した.

計算モデル

Fig. 3.7 の左上に計算モデルを示した. 全計算領域は, 401×401 節点で定義した正方形である. 即ち, 200×200 の有限要素から成っている, 正方形の 4 辺 10 要素分に PML を設定している.

上層 ($V_p = 2000$ m/s, $V_s = 1000$ m/s, $\rho = 1500$ kg/m³) 中に P 波震源があり, 下層 ($V_p = 2500$ m/s, $V_s = 1500$ m/s, $\rho = 1900$ kg/m³) からの反射を考える. 震源には中心周波数 50 Hz の Ricker wavelet を用いた. Ricker wavelet の最大周波数は中心周波数の約 2.5 倍なので, この場合 125 Hz である. 節点 (FDM の場合グリッド) 間隔は $\Delta x = \Delta z = 1$ m に設定した. これらのパラメータから, 上層を伝播する S 波の波長が最も短く, 最大周波数 125 Hz に対する最小波長は, 8 m となり, この長さに対して 8 グリッドを確保している設計である.

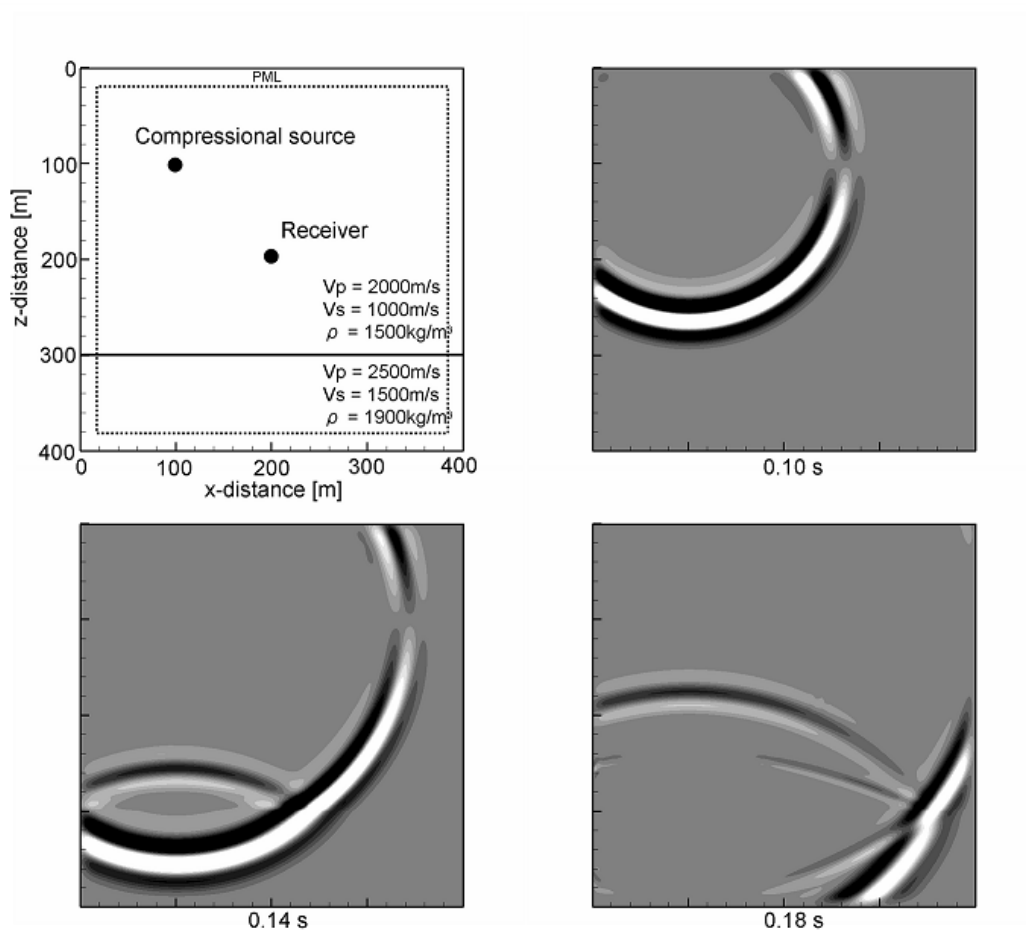


Fig. 3.7: The upper left shows the calculation model. The upper right shows a snapshot of the z-component of particle velocity at 0.10 s. The lower left and right figures show the z-component at 0.14 s and 0.18 s, respectively.

さらに, Ricker wavelet の中心周波数を 66, 80, 100 Hz と上昇させて, 計算の精度の比較を行った. 即ち, 最小波長に対して, 6, 5, 4 グリッドでの計算結果を比較検討した.

計算結果

Fig. 3.7 の右上と下 2 枚の図は, 時間 0.1 s, 0.14 s, 0.18 s での v_z のスナップショットである. 層境界で PP, PS 反射が発生している様子や, PML が良く機能している様子がわかる.

Fig. 3.8 は, Fig. 3.7 の左上のモデルに示した位置での波形記録である. 左列が v_x , 右列が v_z を示している. 黒色の線で解析解を, 灰色の線で DEFGM あるいは, FDM4 の計算結果を示した. DEFGM, FDM4 の計算結果はよく解析解と一致しているために, ここで, DEFGM と FDM4 の精度を比較することは難しい. そこで, 誤差を,

$$E = \sum_{j=n_a}^{n_b} (s_j - s_j^a)^2 \div \sum_{j=n_a}^{n_b} (s_j^a)^2 \quad (3.140)$$

で定義した. n_a は評価を始めるタイムステップ, n_b は評価を終えるタイムステップである. s_j が数値解, s_j^a が解析解である. この値 E を Fig. 3.8 中のそれぞれのグラフの右下に記入した. この値を比較しても DEFGM と FDM4 のどちらが良いかを判断するのは難しい.

最後に, Fig. 3.9 に Fig. 3.8 から 0.2 s ~ 0.3 s を切り出したグラフを示した. PS 反射波のみを切り出したことになる. これで見ると, DEFGM の計算結果の方が FDM4 よりも, 大きなグリッド分散が現れていると言える.

3.6.3 レイリー波

自由表面の影響により形成される表面波は媒質中で最も伝播の遅い波といえる. これに対する計算の安定は, 媒質中の全てにおける計算の安定を意味する. 解析解には 斉藤 (1993) を用いた.

計算モデル

全計算領域は, 4001×2001 節点で定義した正方形である. 即ち, 2000×1000 の有限要素から成っている, 吸収境界は設定せず, 境界からの反射が到達する前の計算結果を検討する.

媒質は $V_p = 1732$ m/s, $V_s = 1000$ m/s, $\rho = 1500$ kg/m³, 震源には中心周波数 50 Hz の Ricker wavelet を用いた. 節点 (FDM の場合グリッド) 間隔は $\Delta x = \Delta z = 1$ m に設定した. これらのパラメータから, 媒質を伝播する S 波の最大周波数 125 Hz に対す

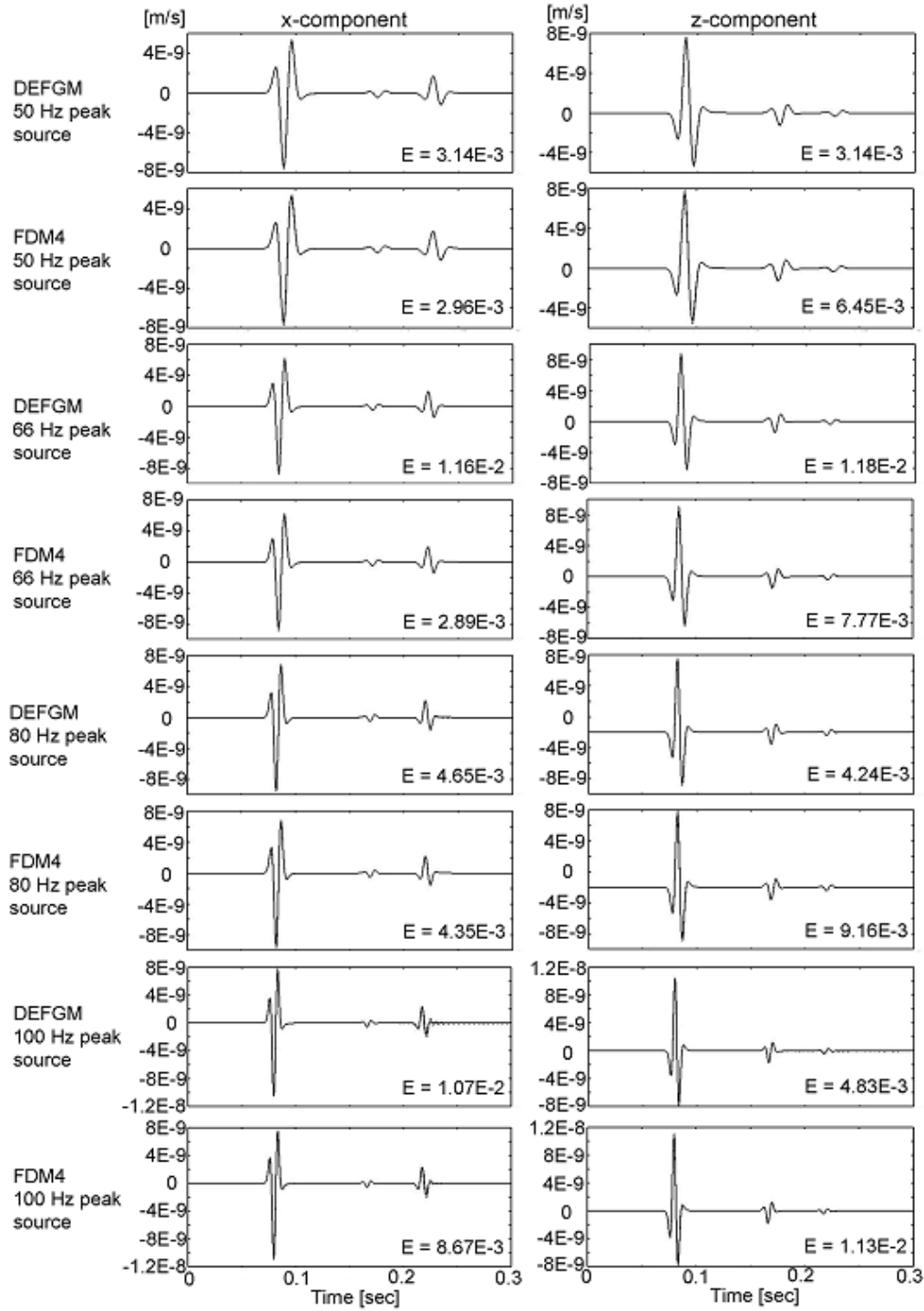


Fig. 3.8: Comparison of the x- and z-direction velocity components. The analytical solution (thick black line) is plotted against the numerical one (thin gray line) obtained by DEFGM and FDM4.

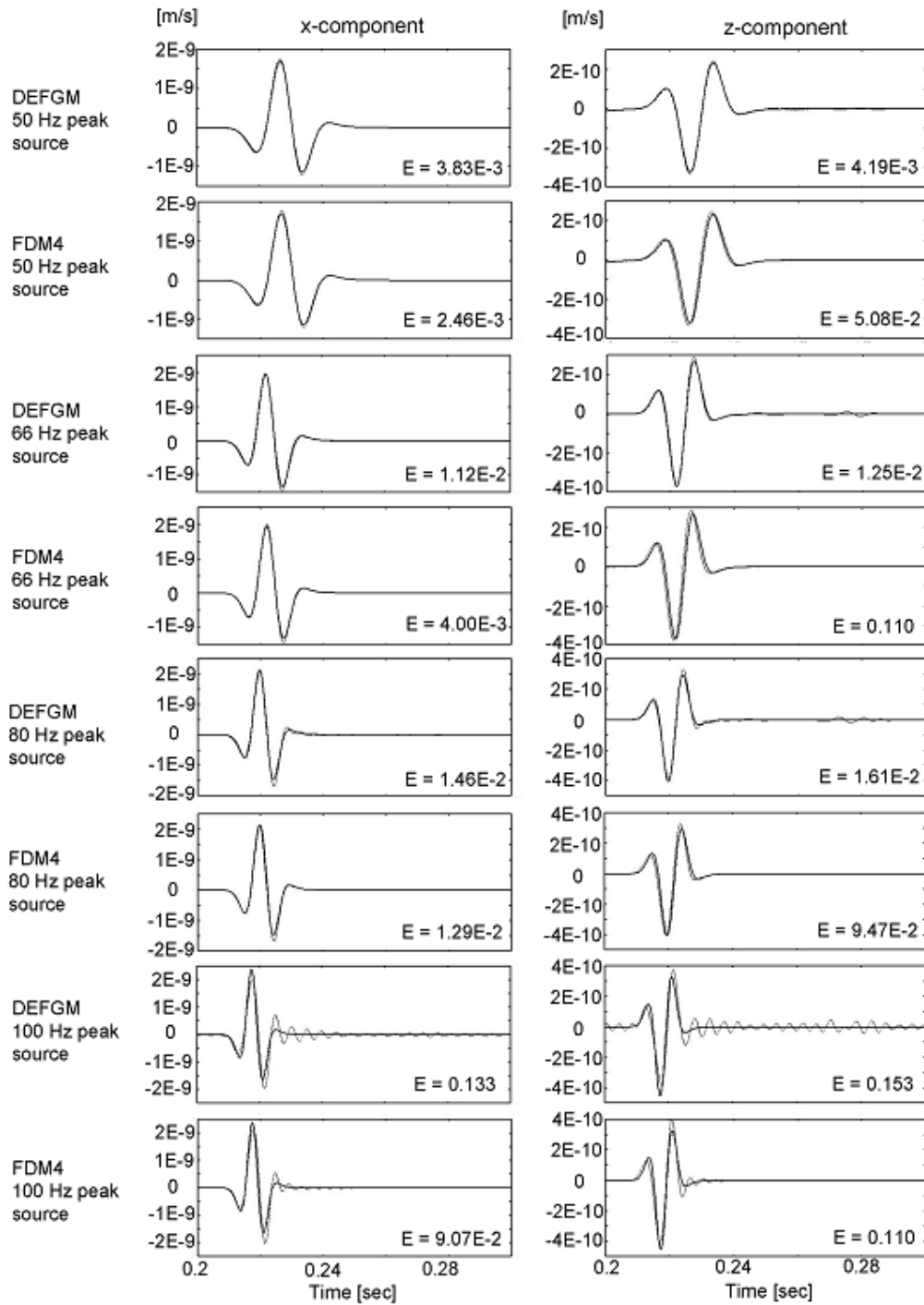


Fig. 3.9: Magnification of Fig. 3.8, between 0.2 and 0.3 s. The analytical solution (thick black line) is plotted against the numerical one (thin gray line) obtained by DEFGM and FDM4.

る最小波長は, 8 m であり, この長さに対して 8 グリッドを確保している設計である. 簡単のため, レイリー波の速度は安定条件に考慮しないが,

$$2 \left(\frac{V_s}{V_p} - 1 \right) \left(\frac{V_s}{c_R} \right)^6 + \left(3 - 2 \left(\frac{V_s}{V_p} \right)^2 \right) \left(\frac{V_s}{c_R} \right)^4 - \left(\frac{V_s}{c_R} \right)^2 + \frac{1}{8} = 0 \quad (3.141)$$

を満たす c_R がレイリー波の速度で, この媒質において, $c_R = 919$ m/s である.

計算結果

FDM4 の計算については, グリッド間隔が 1 m のものに加え, 0.5 m での計算結果も併せて示す. これらを FDM4-d1m, FDM4-d0.5m と呼ぶことにする.

Fig. 3.10(a), 3.10(b), 3.11(a), 3.11(b) は, それぞれ振源より 100, 200, 500, 1000 m 離れた地表面での応答を示している. FDM4-d1m は, 500 m で大きなグリッド分散が現れている. FDM4-d0.5m も, 1000 m の計算結果は DEFGM に及ばない.

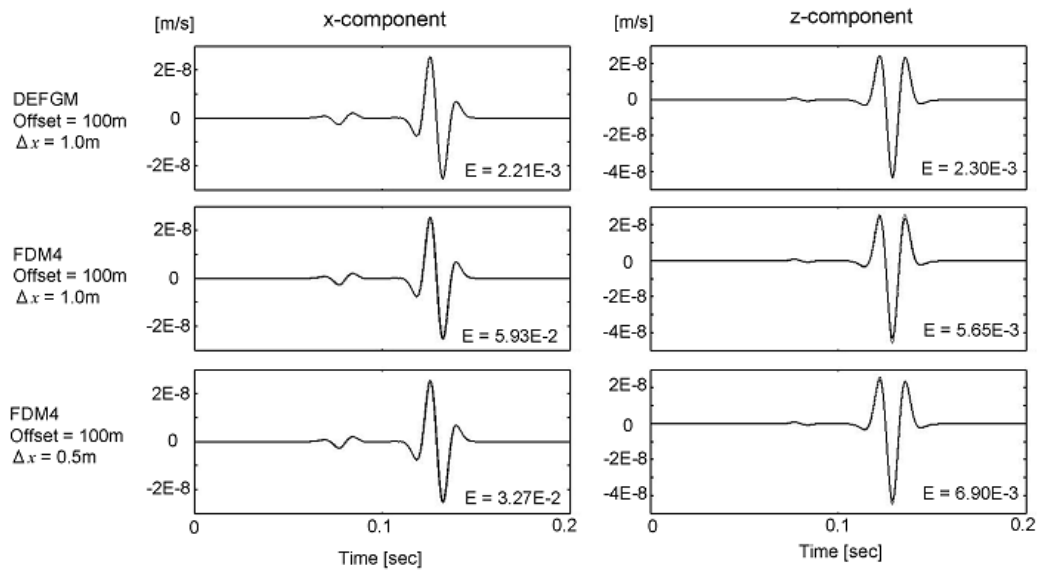
3.6.4 重み関数の比較

さらに, レイリー波を対するテストにおいて式 (3.78) の基底関数と式 (3.70) の重み関数を変化させて以下 4 つのケースについて計算結果を比較する.

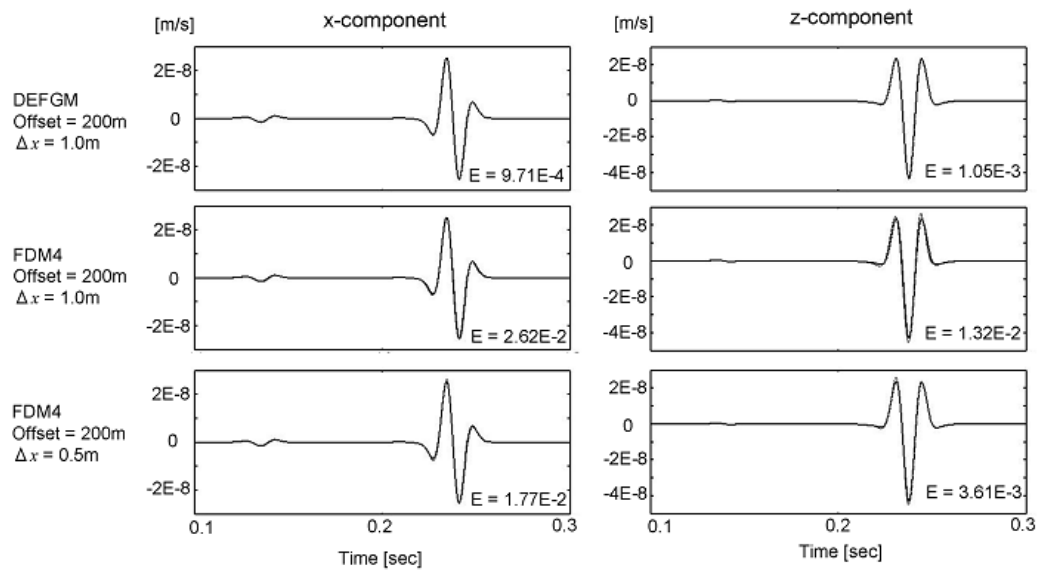
1. 6 bases; 近年の研究 (例えば, Liu, 2003; Beissel and Belytschko, 1996; Brighenti, 2005) で頻繁に使用されている基底関数は, $v(\xi_i, \eta_i) = a_0 + a_1\xi_i + a_2\eta_i + a_3\xi_i\eta_i + a_4\xi_i^2 + a_5\eta_i^2$ で重み関数 (3.70) の $n_a = 4$ を利用する.
2. 7 bases; 前節で説明した通りである.
3. FEM interpolation: 基底関数は, $v(\xi_i, \eta_i) = a_0 + a_1\xi_i + a_2\eta_i + a_3\xi_i\eta_i + a_4\xi_i^2 + a_5\eta_i^2 + a_6\xi_i^2\eta_i + a_7\xi_i\eta_i^2 + a_8\xi_i^2\eta_i^2$ を使用する. この場合, 内挿関数は, 重み関数によらず, Table. 3.1 となる. 即ち, 通常の FEM の計算精度を示すことになる.
4. Compound bases; 中央の GL ポイント (Fig. 3.2(a) の $i = iv$) に対しては, 7 bases, 残り 8 つの GL ポイントにおいて FEM interpolation を利用する.

Fig. 3.12(a), (b) はそれぞれ, オフセットが 1000m と 2000m での計算結果である. 考察を以下にまとめる.

6 bases は FDM4 よりも精度が悪い. 残念なことに過去の EFGM で提案された基底関数と重み関数の組み合わせでは, 期待されたほどの計算精度を得られなかった. 確

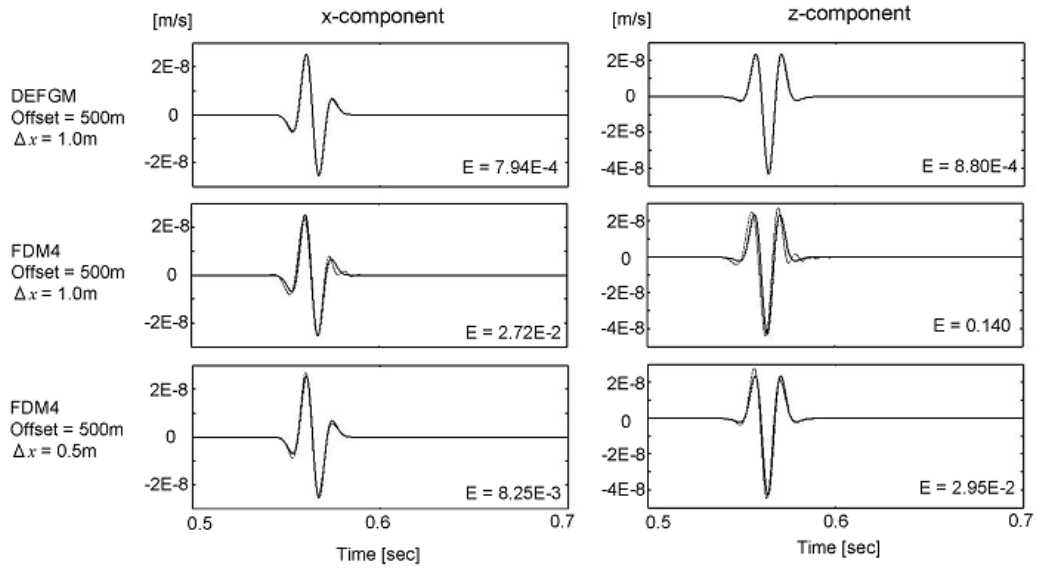


(a) Offset = 100 m

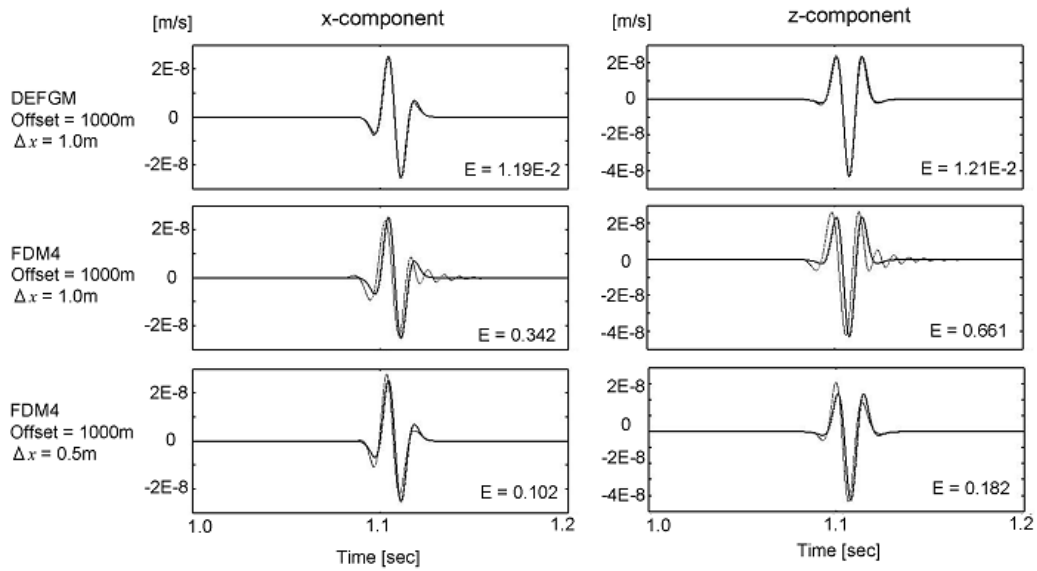


(b) Offset = 200 m

Fig. 3.10: Comparison of the x- and z-direction velocity components. The analytical solution (thick black line) is plotted against the numerical one (thin gray line) obtained by DEF GM and FDM4. From top to bottom, the graphs correspond to DEF GM, FDM4 with 1 m grid spacing and FDM4 with 0.5 m grid spacing. (a) Offset = 100 m, (b) Offset = 200 m

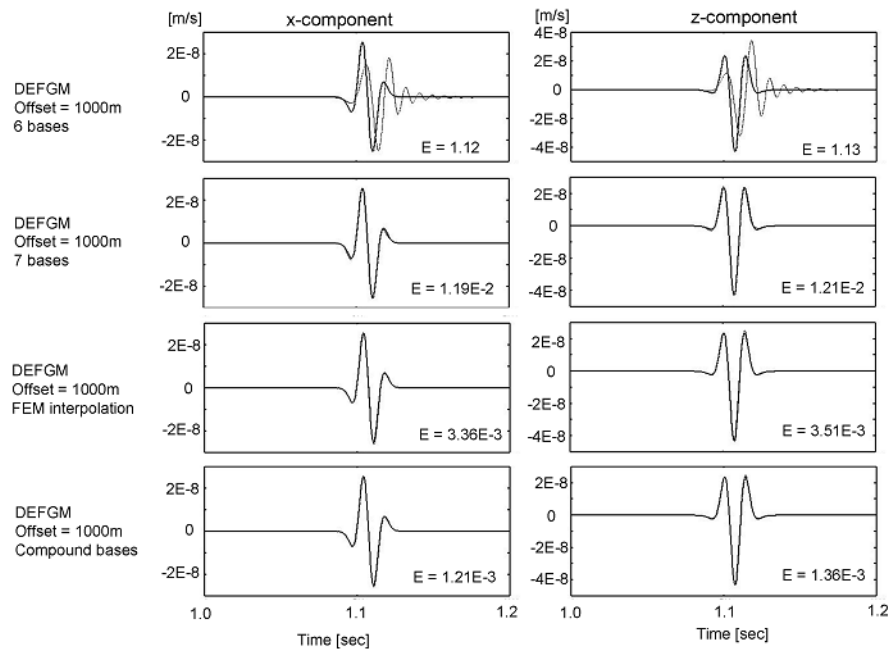


(a) Offset = 500 m

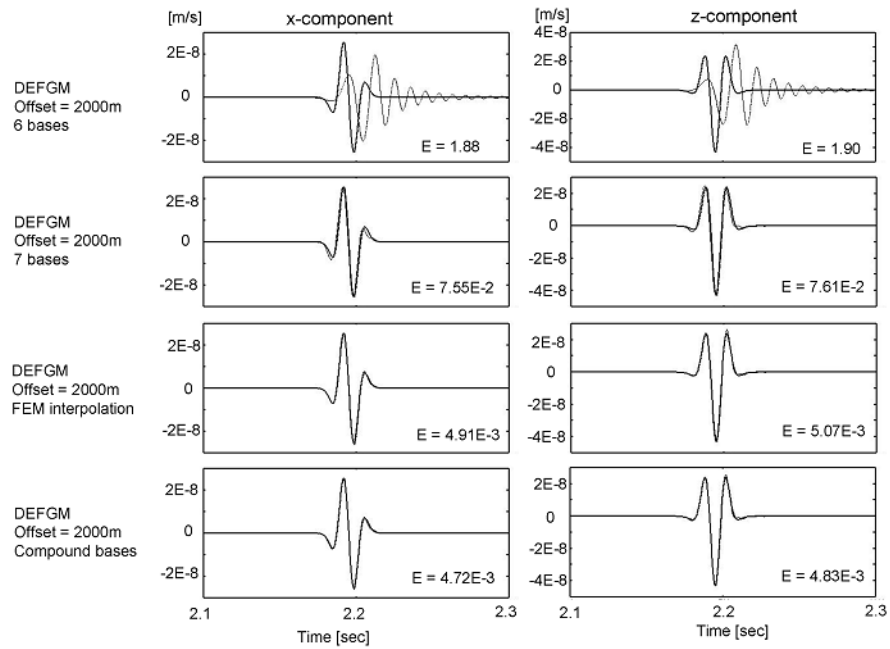


(b) Offset = 1000 m

Fig. 3.11: Continue of Fig. 3.10; (a) Offset = 500 m, (b) Offset = 1000 m.



(a) Offset = 1000 m



(b) Offset = 2000 m

Fig. 3.12: Comparison of the x- and z-direction velocity components. The analytical solution (thick black line) is plotted against the numerical one (thin gray line) obtained by various DEF GM. From top to bottom, the graphs correspond to 6 bases, 7 bases, FEM interpolation and compound bases. (a) Offset = 1000 m, (b) Offset = 2000 m.

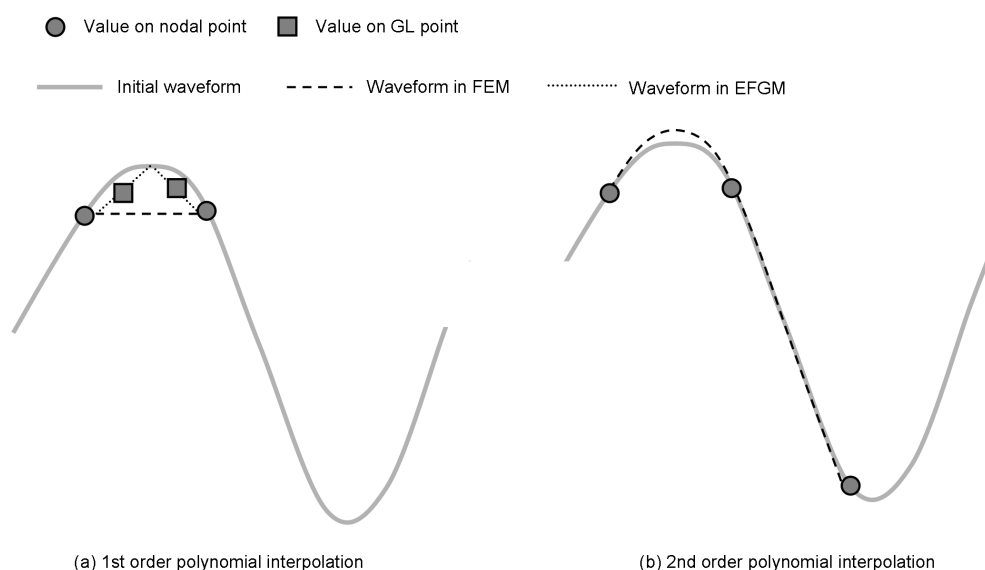


Fig. 3.13: Schematic illustrations when the EFGM computation for a wave propagation problem is conducted. (a) First-order polynomial interpolation, (b) Second-order polynomial interpolation.

かに, Belytschko et al., (1994) や武川 (2007) では, EFGM は標準的な FEM より計算精度が良くなることがわかっているが, 注意しなければならないのは, 彼らが, 2×2 の節点で要素を構成し計算を行っていたことだ (即ち, 空間精度が 2 次であった). 前節にて提案された 7 bases ならばその精度は劇的に改善するが, 通常の FEM の内挿関数を用いる方が精度が良いことがわかった.

Fig. 3.13 は, EFGM を波動伝播問題に適用した際のイメージである. Fig. 3.13(a) に示したように, 空間精度が 2 次の場合, MLS による内挿は, GL ポイント上で FEM における直線的に内挿された波形を改善する. しかし Fig. 3.13(b) のように空間精度が 3 次の場合, FEM の内挿でも非常に精度が良くなっているため, MLS による改善の余地が少なくなっていることがわかる.

EFGM は, MLS を使用することで, GL ポイント周辺の内挿関数は改善するが, 逆に, 要素境界上での連続性は失われている. つまり EFGM と通常の FEM の比較において, 計算精度は, この 1 対の利点と欠点のトレードオフに支配されていると考えられる. ゆえに, Compound bases では, 要素中心部の GL ポイントには MLS を利用した内挿関数を使用し, 要素端部に近い GL ポイントには, 標準 FEM の内挿関数を使用した. 結果, わずかに通常 FEM よりも精度の良い結果を得ることができた.

Table 3.2: The array sizes for our FEM and FDM in the case of that $(2N_x + 1)(2N_z + 1)$ nodal points are evaluated.

	λ, μ	ρ	\bar{M}	$\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz},$	v_x, v_z
FDM	$(2N_x + 1)$ $\times (2N_z + 1)$	$(2N_x + 1)$ $\times (2N_z + 1)$	N/A	$(2N_x + 1)$ $\times (2N_z + 1)$	$(2N_x + 1)$ $\times (2N_z + 1)$
FEM	$N_x N_z$	N/A	$(2N_x + 1)$ $\times (2N_z + 1)$	$9N_z N_x$	$(2N_x + 1)$ $\times (2N_z + 1)$

Table 3.3: Collection of computation times on Xeon 3.0 GHz PC. The calculation model consisted of 1000 time steps and 401×401 nodal points (upper table). The model with 2000 time steps and 801×801 nodal points (lower table) is also shown. Values in square brackets show the ratio of the calculation time when FDM is assumed to be one. [PML] means the computation comprising PML absorbing boundary condition.

	401×401	801×801	401×401 [PML]	801×801 [PML]
FDM	26 s	4 min 34 s	2 min 30 s	30 min 50 s
FEM	1 min 16 s	24 min 18 s	18 min 26 s	3 h 5 min 34 s

3.6.5 計算時間

必要メモリ

Table. 3.2 に、計算に必要な配列のサイズを示す。倍精度計算の場合、配列数に掛けること 8 byte のメモリが必要である。

計算時間

Table. 5.5(a) は、Xeon 3.0 GHz の PC での DEFGM と FDM4 の計算時間の比較である。計算領域は節点数 401×401 でタイムステップ数 1000 回のもとの、節点数 801×801 でタイムステップ数 2000 回のを試行した。グリッド間隔を半分にしたことを想定している。それに伴い Δt も半分にしなければならないので (式 (3.139)), タイムステップ数も 2 倍になる。

この Table. 5.5(a) をみてわかることは、 801×801 の FDM4 の計算時間よりも、 401×401 の DEFGM の計算時間の方が短いということである。

3.7 まとめ

本章では, FEM に対して構成則と運動方程式を交互にアップデートする計算方法を考案した. さらに, エLEMENTフリーガラーキン法の移動最小二乗法を用いた内挿関数の算出を適用し, 従来の FEM からの精度向上や, 空間精度 4 次の FDM との比較を行った. この DEFGM を中心に研究した成果を以下に述べる.

- 精度の限界を調べるためには, 大きな計算領域でテストを行う必要がある. DEFGM を利用し, 最大節点数 4001×2001 の計算領域で, 計算精度の比較検討を行うことができた. DEFGM は FDM4 の 2.9 倍の計算時間を必要としたが, 必要メモリは, ほとんど同じである. また, DEFGM は FDM の場合と同様に, PML を適用することができる.
- PS 反射波の解析解を利用して比較検討を行った. FDM4 の精度は, DEFGM より少し良かった. なぜなら, DEFGM の空間精度が 3 次であるのに対し, FDM4 の空間精度が 4 次だからである. つまり, 無限空間でのシミュレーションを行うのであれば, FDM4 は計算時間が小さいので, DEFGM よりも強力といえる.
- 最短波長に対して 8 グリッドの条件で行ったレイリー波のテストにおいて, グリッド分散なしに FDM4 が 5 波長 (Ricker wavelet の中心周波数に対する) であったのに対し, DEFGM は 50 波長以上を伝播した. この理由は, FDM4 が自由表面の近くが空間精度 2 次であったからと考えられる. さらに, グリッド間隔 1m での DEFGM がグリッド間隔 0.5m の FDM4 よりも精度が高かった. この比較において, DEFGM の計算時間は FDM4 よりも小さくなる. ゆえに自由表面を含んだ計算モデルをシミュレートするとき, DEFGM は FDM4 よりも強力である.
- DEFGM において, 基底ベクトルと重み関数を変化させながら比較検討を行った. 過去の研究に示された基底ベクトルと重み関数の組み合わせは, 期待されるほどの精度を得られなかった. しかし, 著者の提案するこれらの組み合わせは EFGM の精度を劇的に向上させた. さらに, 通常の FEM を上回る精度を与える組み合わせを発見した. 今後, さらに精度を向上できる重み関数の発見を期待できる.

実用上の観点で本章での成果を考察すると, FDM と FEM あるいは DEFGM は, 用途によって使い分けことが理想的といえる. FDM は, プログラムが容易で計算が速い. 反射法探査のモデリングのように自由表面を必要としないモデルならば, DEFGM よりも圧倒的に有利といえる. 自由表面を含むモデルでも伝播距離が短ければ, 十分な精度を提供してくれる. 一方で, DEFGM は, 座標変換の適用方法が明確で, 複雑なモデルに対して FDM よりも強力であるといえる.

次章からは, FDM と FEM あるいは DEFGM の実用的な 3 次元問題への適用について, 検討される.

第4章 列車走行に起因する地盤振動のFDMシミュレーション

4.1 はじめに

高速列車は便利な輸送機構であるが、地盤振動を発生させる。この振動は現状で、環境基準をクリアしているとしても、将来のさらなる高速化によっていずれは問題となることも予想される。定量的にこの現象について説明することができる方法論を発見することが重要である。列車走行によって誘発された地盤振動は3つの物理的な要素で構成される：(1) 移動振源、(2) 地盤の弾性または粘弾性体として波を伝える働き、(3) 移動振源と地盤間のカップリング。(2) 波の伝達と(3) カップリングは、弾性波理論で説明できるだろう(安芸・リチャーズ, 2004)。つまり、移動振源の処理がこの分野に特定の物理であるといえる。

これまでに行われた研究を見渡すと、移動振源は以下の3つの独立な要素に区分されている。

1. 準静的な移動振源 (SMS; quasi-Static Moving Source)
2. 枕木間隔による振源 (SPF; Sleeper Passage Frequency)
3. 動的移動振源 (DMS; Dynamic Moving Source)

そして、支配的な要因がDMSであることが、近年、明らかにされつつある。

SMSは列車の重量の移動を意味する。高速で走行する列車は、その重量によって10Hz未満の地盤振動を発生させる。しかしこの振動は線路からの距離が離れるに従って急速に減退する(Takemiya and Bian, 2005)。また、Degrande and Lombaert (2001)でも同様に、列車重量の移動そのものは、地盤振動の要因ではないと結論付けられている。理論的に、列車速度が弾性波伝播速度より速いことによる列車重量からの bow wave(いわゆるマッハ波)と比べても、DMSからの振動振幅の方がはるかに大きいことも知られている(Sheng et al., 1999)。SPFは、レール下の枕木によって引き起こされる振動で、列車速度を枕木間隔で割った周波数で現れる。枕木間隔は、50～60cmなので、高速列車の場合この周波数は非常に高く、例えば、列車が60m/s以上のとき、SPFは100Hz以上である。これについても、Degrande and Lombaert (2001)は成功裏にシミュレートしている。

次節で述べるように、注目される振動が線路から10～20mで周波数5～40Hzであることから、DMSに焦点を絞り研究する。近年、Sheng et al. (2004)、Lombaert et al (2006)は、軌道狂い(Track irregularities)と車両-線路構造物の力学モデルDMSを推定し、この得られたDMSを入力とする地盤振動のシミュレーションは観測記録をよく再現するものだった。著者らも、列車の車輪に歪ゲージを取り付け計測された車輪に掛かる力を利用することを考案した。この際、軌道狂いと車両-線路構造物モデル

から推定した DMS が, 歪ゲージで直接計測した力とは, ある程度誤差があることを確認した (神田ら, 2005). DMS 推定の問題は, 軌道狂いが長周期に対して計測できない点と, レール下の枕木, バラスト, 盛土の弾性定数および粘性定数は計測が困難な点である. そこで, 本研究では, 直接計測した力から地盤振動を FDM によってシミュレートする (Katou et al., 2006a).

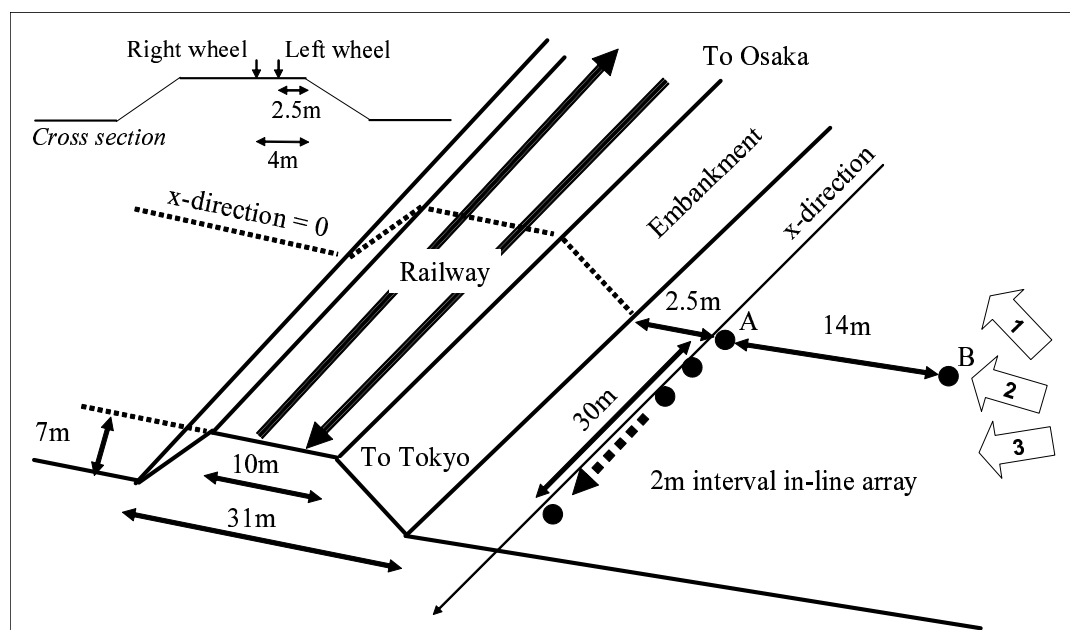


Fig. 4.1: Schematic illustration of the field site. This is an embankment railroad. Upper left panel shows a cross section of the embankment. Location of right side and left side wheel is indicated. Three pictures are taken from arrowed angles.

4.2 観測される地盤振動と車輪にかかる力

観測される地盤振動記録として、2004年8月6日に滋賀県で実測した記録を用いる。車輪にかかる力は、同区間で2004年8月5日に計測されたものである。Fig. 4.1はフィールドサイトの図解でFig. 4.2～4.4はそれぞれ、Fig. 4.1の矢印1～3に向かって撮った写真である。現場は盛土区間で、周辺は水田で、交通や工場などのノイズ源になるものがない。

4.2.1 PS 検層と経験的な弾性体パラメータ

図4.1中の点Aにおいて行なったボアホール柱状図がTab. 4.1である。その表中の V_p , V_s はPS検層によって求めた。Fig. 4.5は深度方向の V_p , V_s のイメージである。密度は経験的に全て 1500 kg/m^3 とする。

盛土部分の物性は、付近で行われた弾性波初動トモグラフィ(神田, 2006)から、 $V_p = 800 \text{ m/s}$, $V_s = 200 \text{ m/s}$, $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$ という経験的な値としている。

現場において減衰パラメータは計測していない。減衰パラメータは計測方法も逆解析手法も工学的に確立されたものがないため、シミュレーションの中で、最適な粘性定数値の推定を行う。



Fig. 4.2: The picture taken from angle 1 in Fig. 4.1.

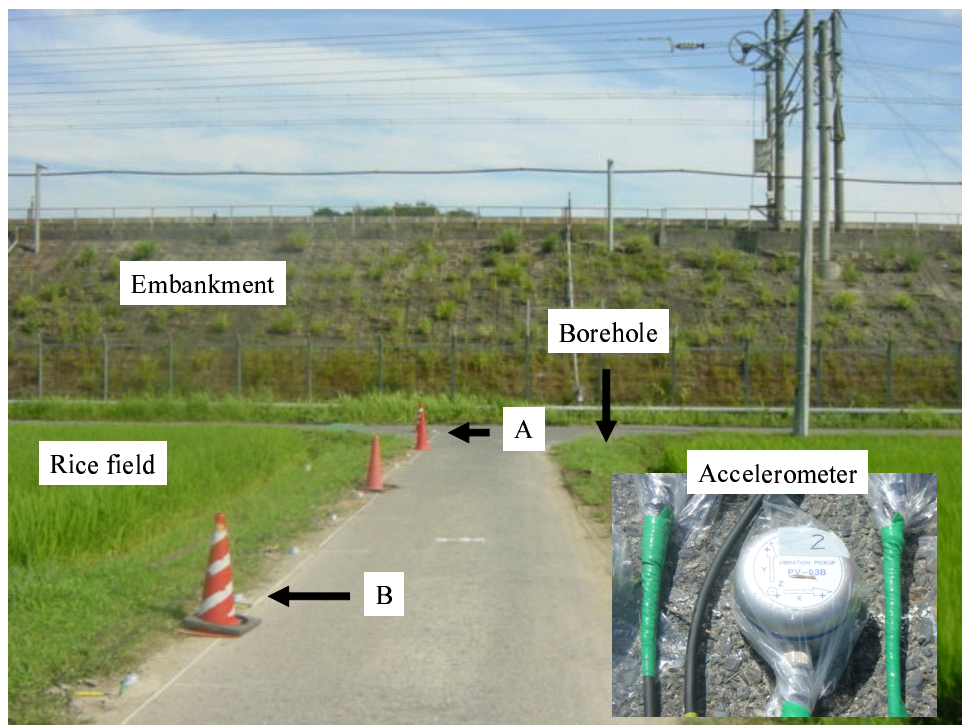


Fig. 4.3: The picture taken from angle 2 in Fig. 4.1. Inset in lower right of image shows the accelerometer.



Fig. 4.4: The picture taken from angle 3 in Fig. 4.1.

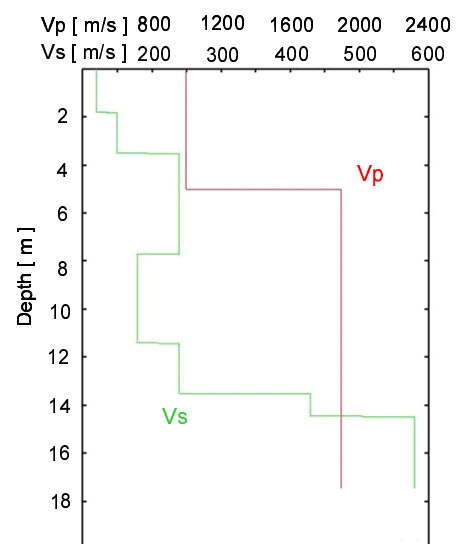


Fig. 4.5: Graph of the PS logging data. This graph is plotted by Tab. 4.1

Table 4.1: Boring log on the railway site. This table shows the aspect of boring core and the result of PS logging. Schematic diagram of this site is shown in Fig. 4.1. Borehole present at location A.

深度 (m)	土質区分	記事	V_p (m/s)	V_s (m/s)	ポア ソン比
0.00 ~ 0.30	表土	礫径 30mm ~ 50mm の角礫 主体.	1000	120	0.493
0.30 ~ 1.80	砂質シルト	深くなるにつれ含水量減少. 粘性は中位.	1000	120	0.493
1.80 ~ 2.60	粘土	粘性強い.	1000	150	0.488
2.60 ~ 3.10	砂質粘土	少量の漏水あり.	1000	150	0.488
3.10 ~ 3.50	シルト質細砂	粒径の均一な細砂層.	1000	150	0.488
3.50 ~ 5.00	砂礫	礫径は 3mm ~ 5mm の角礫 と亜円礫主体. マトリクスは粗砂 ~ 中砂. 含水量は低位 ~ 中位.	1000	240	0.469
5.00 ~ 6.90	砂礫	礫径は 3mm ~ 5mm の角礫 と亜円礫主体. マトリクスは細砂 ~ 中砂. 含水量は低位 ~ 中位. 6.40m 以深シルト質細砂を 少量含む.	1900	240	0.492
6.90 ~ 7.70	砂礫	マトリクスは中砂.	1900	240	0.492
7.70 ~ 8.40	中砂	礫径 2mm 程度の小礫を少量 含む.	1900	180	0.495
8.40 ~ 9.00	中砂	色調が白色の中砂. 少量の漏水あり.	1900	180	0.495
9.00 ~ 9.80	砂混 り粘土	黄褐色のシルト質細砂を不 規則に挟む.	1900	180	0.495
9.80 ~ 10.10	粘土	粘性強い.	1900	180	0.495
10.10 ~ 11.40	小礫混 り粘土	礫径は 2mm 前後で少量混入 する. 粘性強い.	1900	180	0.495
11.40 ~ 11.80	粘土	粘性強い.	1900	240	0.492
11.80 ~ 13.50	砂混 り粘土	下部, 中砂分多く混入する. 粘性強い.	1900	240	0.492
13.50 ~ 14.45	粘土混 り砂礫	礫径は 3mm ~ 30mm の亜円礫 主体. マトリクスは褐色の粘土.	1900	430	0.473
14.45 ~ 18.45	シルト混 り砂礫	礫径は 3mm ~ 30mm の亜円礫 主体. マトリクスは深くなるにつれ 黄褐色のシルトから中砂に. 特に漏水なく, 孔は自立.	1900	580	0.449

4.2.2 地盤振動記録

Fig. 4.6 は、地盤振動記録である。受信は加速度である。(a) に時系列を、(b) に振幅スペクトルが示めされている。Fig. 4.7 は、列車の車軸配置が図示されている。列車の全長は 400 m あり、振幅の大きな地盤振動が 8 秒弱観測されている。

線スペクトル

Fig. 4.6(b) の振幅スペクトルには、特徴的な線スペクトルが観測される。列車である新幹線の車両は機関車量がなく重量の配分は均質に各車軸に配分されていると考えられる。全車軸からの応答が、1 つの車軸からの応答の単純な重ね併せによって再現できる場合、線スペクトルが観測される。

例えば、速度 V m/s で走行する列車の 1 つ目の車軸からの地盤振動応答を $u(t)$ とする。そして 2 つ目の車軸が 1 つ目の車軸から L m にあり、1 つ目の車軸と同じ波動場を生成するならば、これら 2 つの車軸から観測される地盤振動応答 $f(t)$ は、

$$\begin{aligned} f(t) &= u(t) + u\left(t - \frac{L}{V}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta\left(t - \frac{L}{V} - \tau\right) d\tau \end{aligned} \quad (4.1)$$

と表せるので、フーリエ領域での応答 $\tilde{f}(\omega)$ は

$$\tilde{f}(\omega) = \tilde{u}(\omega) \left\{ 1 + \exp\left[i\omega \frac{L}{V}\right] \right\} \quad (4.2)$$

であり、スペクトルは $\omega L/V$ が 2π の整数倍で 0 になる。実際の列車の車輪間隔に対するフーリエ領域での応答 $\tilde{g}(\omega)$ は、

$$\tilde{g}(\omega) = \tilde{u}(\omega) \left\{ 1 + \exp\left[i\omega \frac{a}{V}\right] \right\} \left\{ 1 + \exp\left[i\omega \frac{b}{V}\right] \right\} \frac{1 + \exp\left[i\omega \frac{NA}{V}\right]}{1 + \exp\left[i\omega \frac{A}{V}\right]} \quad (4.3)$$

である。詳しい式の展開は、吉岡 (1999) を参照されたい。ここで、使用されている定数 a, b, A, N, V は Fig. 4.7 に従う。Fig. 4.8 は、式 (4.3) の右辺 3 項の絶対値を別々にプロットしたものである。列車速度は $V=74.4$ m/s である。8.9, 11.9, 17.9, 20.8, 23.8, 26.8, 29.7, 32.7, 35.6, 38.6 Hz が線スペクトルのピークになる。右辺の最終項が支配的に $\tilde{g}(\omega)$ 決定していることがわかる。Fig. 4.8 の最下のパネルは $\tilde{u}(\omega)$ が 1 の時の $\tilde{g}(\omega)$ の振幅スペクトルを表している。この振幅スペクトルの様相は地盤振動記録 Fig.4.6(b) とある程度似ていることもわかる。線スペクトル化は、すべての車輪から地盤へ入力される波形が同じであるという仮定に基づいているが、現場データは良く線スペクトル化している。つまり、各車輪から地盤へ入力されている波形は同じ、あるいは良く似ていると考えられる。ゆえに本研究では、1 軸からの応答は非常に重要である。

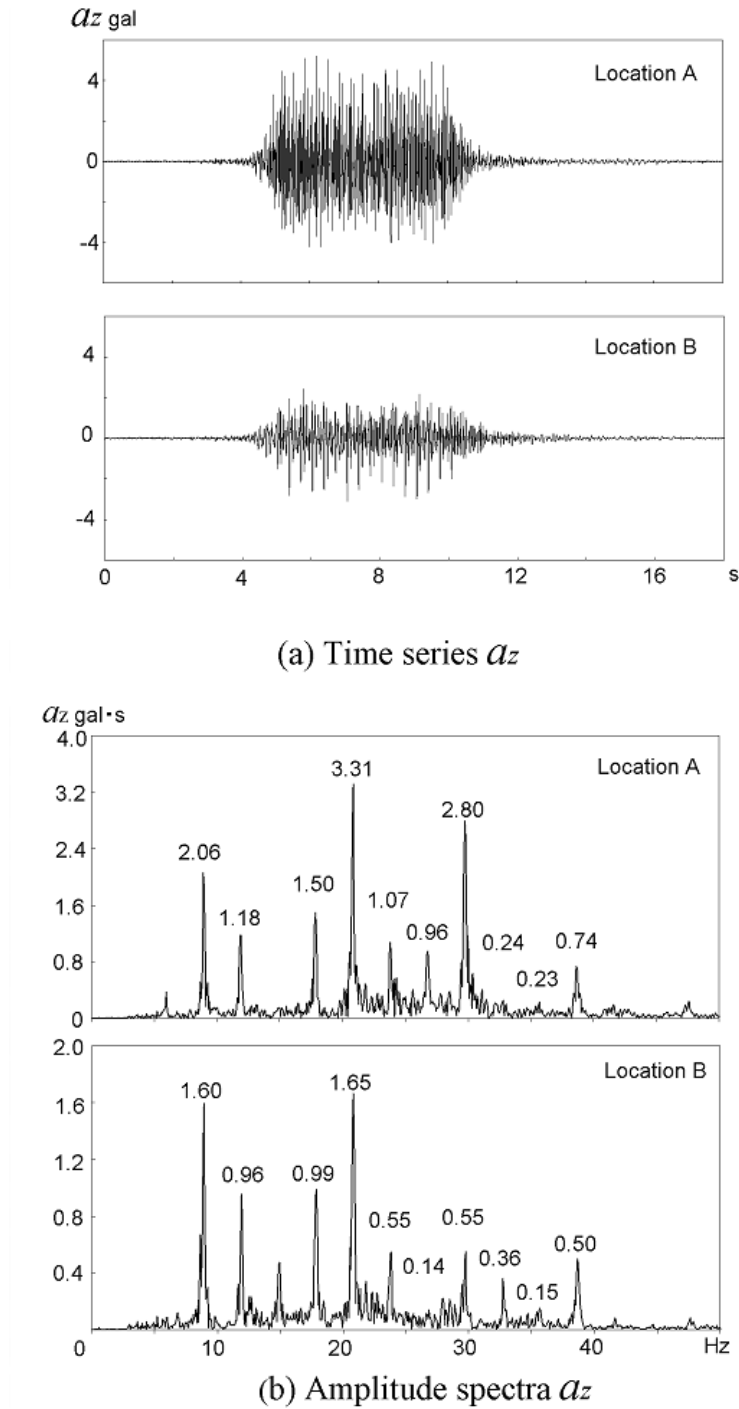


Fig. 4.6: Ground vibration observed at a field site. (a) Time series for field records of vertical components of acceleration. Locations A and B are 15 m and 30 m from the rail track, respectively. (b) Amplitude spectra for (a). Ten peak frequencies are indicated and are at 8.9, 11.9, 17.9, 20.8, 23.8, 26.8, 29.7, 32.7, 35.6, and 38.6 Hz.

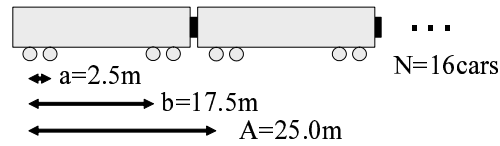


Fig. 4.7: Schematic illustration of the axle arrangement of the train investigated in this study.

しかし, Fig. 4.6(b) の B 地点での応答には, 14.9 Hz のピークも現れている. これは, 各車軸からの応答が完全には同じでないことから生じるといえる. 本研究では, 列車の 3 次元的な挙動までは考慮しないが, 将来的にその挙動は加味して行きたい要素の一つである.

列車速度の推定

軸スペクトルを利用して列車速度を推定することが出来る. 明瞭な 2 つのピークを選び, その間隔が Δf で, この 2 つのピーク間に M 個のピークがある場合, 列車速度は,

$$V = \frac{A\Delta f}{M-1} \quad (4.4)$$

で推定できる. A は Fig. 4.7 に示した, 列車の一両の長さである. この速度推定法は, ピーク数 M の値が大きいほど精度が良い.

インラインアレイ観測記録からわかるドップラー効果の存在

本節の目的はインライン方向受振記録から, 逆解析的に振動源を特定することである. 特にドップラー効果を観測しているか, いないかが振動源を特定する上で, 重要な鍵となる. つまり, ドップラー効果を観測できれば, 振動源が振動しながら移動しているという可能性が高くなり, 逆に, 振動が線路の欠陥部などから集中的に発生しているという可能性を排除することができるからである.

Fig. 4.9 に示すような, 線路と平行に 1 次元の受振器配置について考える. ある受振器群に角度 θ で入射する波は, ドップラー効果によって, 見掛けの波長 λ , 周波数 f

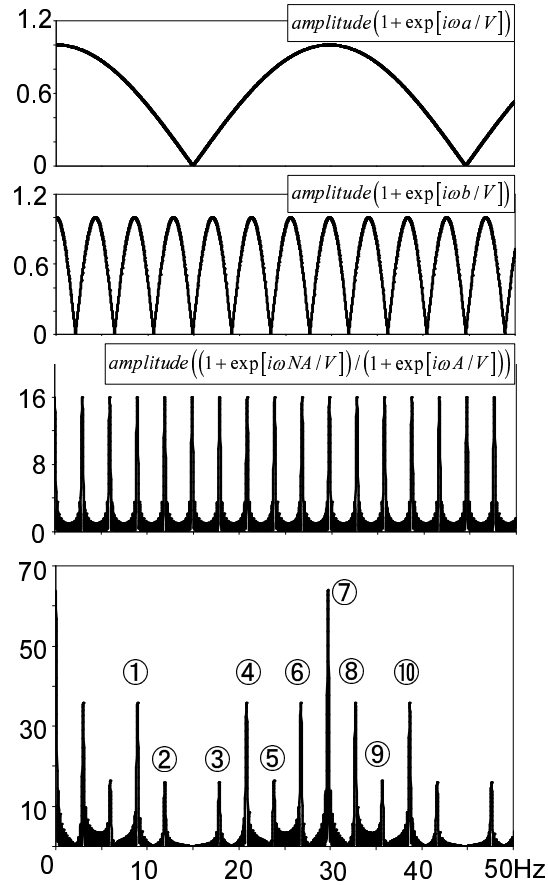


Fig. 4.8: The bottom panel shows the line-shaped envelop given by a 16 car train running at 74.4 m/s. It is recognized that Eq. (3) provides the field data with 10 main peak frequencies: 8.9, 11.9, 17.9, 20.8, 23.8, 26.8, 29.7, 32.7, 35.6, and 38.6 Hz. If the total response from 64 axles were completely the same, the amplitude spectrum from all the wheels could be calculated by multiplying this envelop with the response from a single axle.

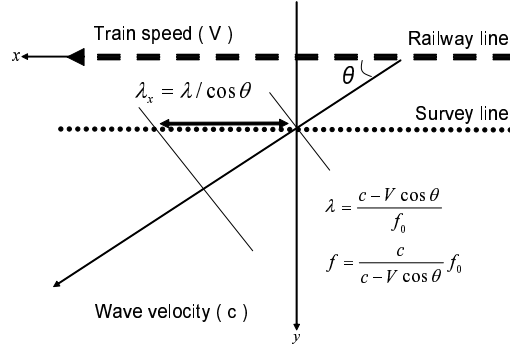


Fig. 4.9: Geometry of the Doppler effect.

がそれぞれ

$$\lambda = \frac{c - V \cos \theta}{f_0} \quad (4.5)$$

$$f = \frac{c}{c - V \cos \theta} f_0 \quad (4.6)$$

$$0 < \theta < \pi \quad (4.7)$$

となっている. c は地盤の振動伝播速度, V は列車の走行速度である. アレイ線方向の見掛け波長 λ_x は

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \theta} \quad (4.8)$$

であるので, この λ_x の逆数を波数 k_x とすると

$$k_x = \frac{1}{\lambda_x} = \frac{\cos \theta}{c - V \cos \theta} f_0 \quad (4.9)$$

であり, FK 領域での応答は, 式 (4.6), (4.7), (4.9) を $\cos \theta$ を消去するようにして解いたもので

$$f = V k_x + f_0 \quad (4.10)$$

$$\frac{c}{c + V} < f < \frac{c}{c - V} \quad (4.11)$$

である. これからわかることは, 観測データにおける FK 応答では, 列車に乗っていない人が感じる振動周波数が f_0 で, 列車速度の傾きを持ったスペクトル分布となるということである.

さて, Fig. 4.1 に示した線路と平行する方向 (インライン方向) に受振器配置で, 観測された受振記録を Fig. 4.10 に示す. (a) は時系列を並べたもの. (b) は FK スペクト

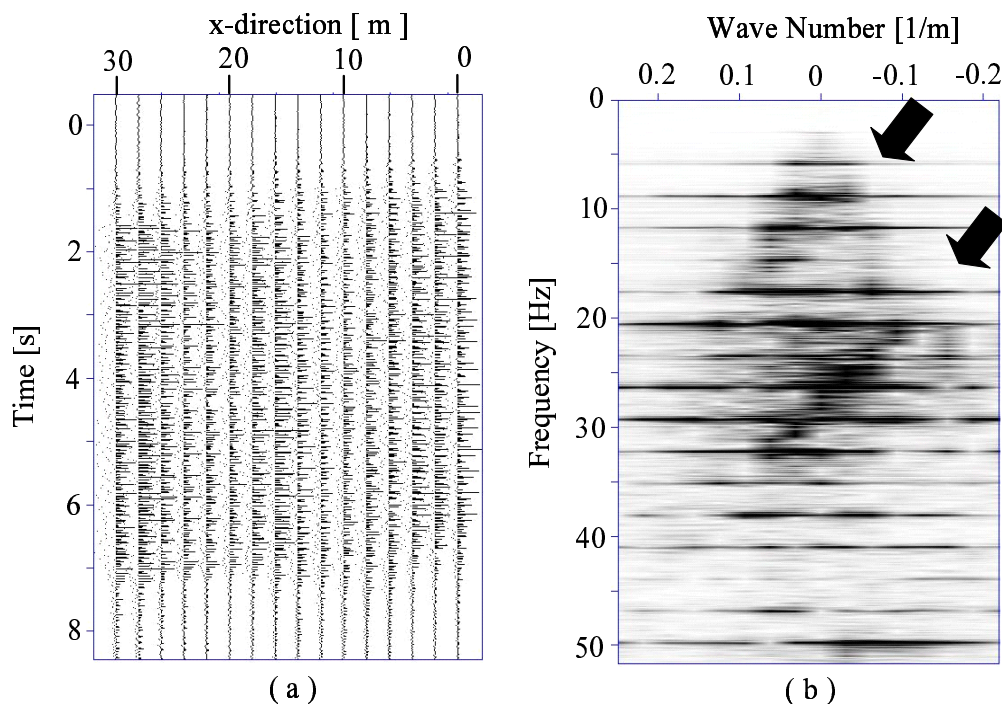


Fig. 4.10: Field data for the in-line array shown in Fig. 1. The number of receivers arranged parallel to the railway is 16. (a) Vertical component acceleration waveforms for the test field. (b) FK spectrum. Sloping distributions representing the Doppler effect are presented.

ルの振幅である。観測データは z 方向 (鉛直方向) 成分の加速度記録である。1 つの図に対するトレース間での振幅の大小関係は保存されている。現場データの解析において、1 次元受振点配置の時間領域データ $u(x, t)$ に対して、1 次元波数の周波数領域応答 $\tilde{u}(k, f)$ は、フーリエ変換を用いて以下のようにして求めている。

$$\tilde{u}(k, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) \exp[-i2\pi ft] \exp[-i2\pi kx] dx dt \quad (4.12)$$

考察

Fig. 4.10 中に矢印で 2ヶ所示した直線的なスペクトル密度の分布があり、傾きが、軸スペクトルから求めた列車速度 $V=73.2$ m/s に一致している。列車の走行路上には線路の継ぎ目がない事がわかっている。また、軸スペクトルによって線スペクトル化が激しい。地盤振動の全てがドップラー効果を含んでいると推定したいが、これを実証するには後述する数値シミュレーションが有益と考えられる。

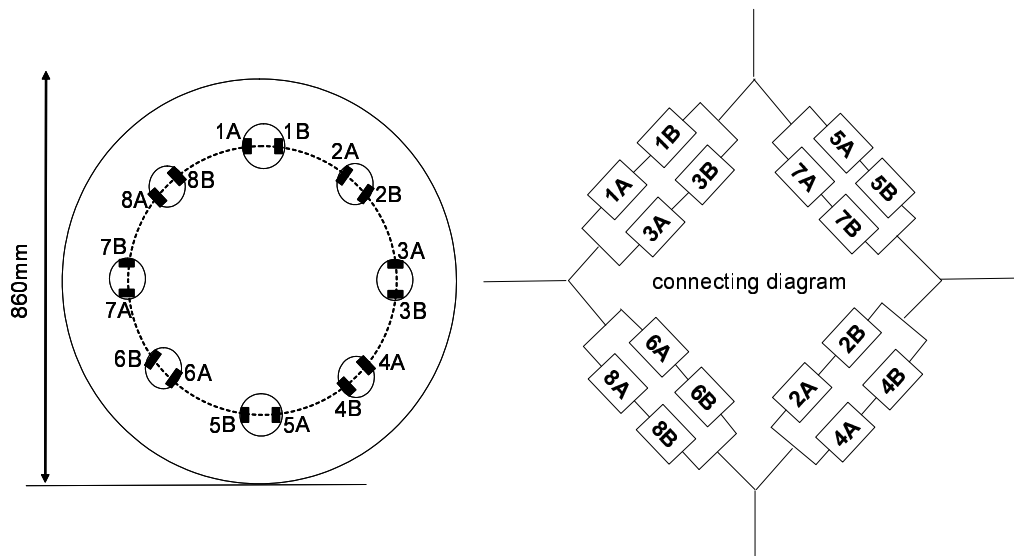


Fig. 4.11: Diagrams of strain gauges for measuring the force on wheel. Left panel shows a diagram of a wheel with 16 strain gauges attached to measure the vertical force on the wheel. The right panel shows a connecting diagram.

4.2.3 車輪にかかる力

車輪にかかる力は, Fig. 4.11 に示したような, 16 個の歪ゲージを用いて計測される (鉄道総研, 1993). 車輪の半径が 0.43 m であることから, サンプルできる距離間隔は 0.3377 m である. ナイキスト波数により解析できる線路方向の距離は倍の 0.675m となる. 列車が 74.4 m/s で走行すると時間サンプルは 0.009 s となり, 解析可能周波数は 111 Hz までとなる. Fig. 4.6(b) からわかるように, 観測される地盤振動は主として 50 Hz 未満であることから, この記録をシミュレーションに入力に用いれば, ほとんどの周波数を再現することが可能である.

Fig. 4.12 の (a) は計測された力の時系列, (b) は振幅スペクトルである. 地盤振動を観測した地域は同じであり (a) に示された距離が, Fig. 4.1 の x 軸に対応している. (b) からわかることは, 列車に乗っている人が感じる振動数が, 0 ~ 70 Hz 程度であり, 地盤振動の周波数帯 (Fig. 4.6(b)) と同様である.

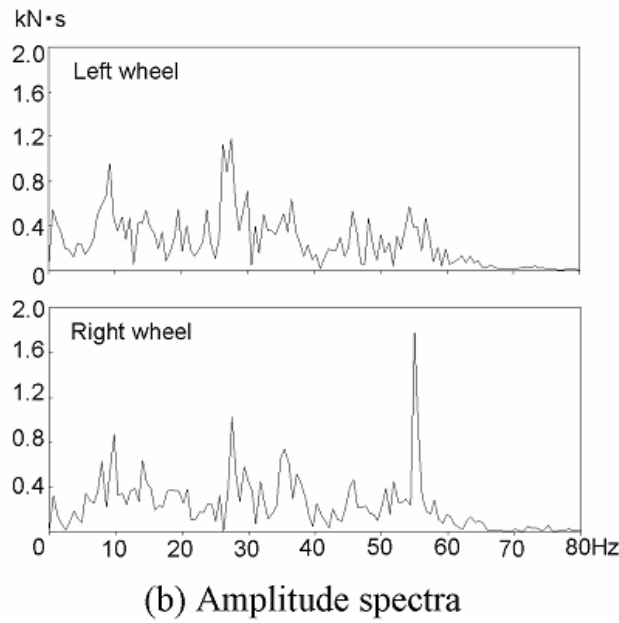
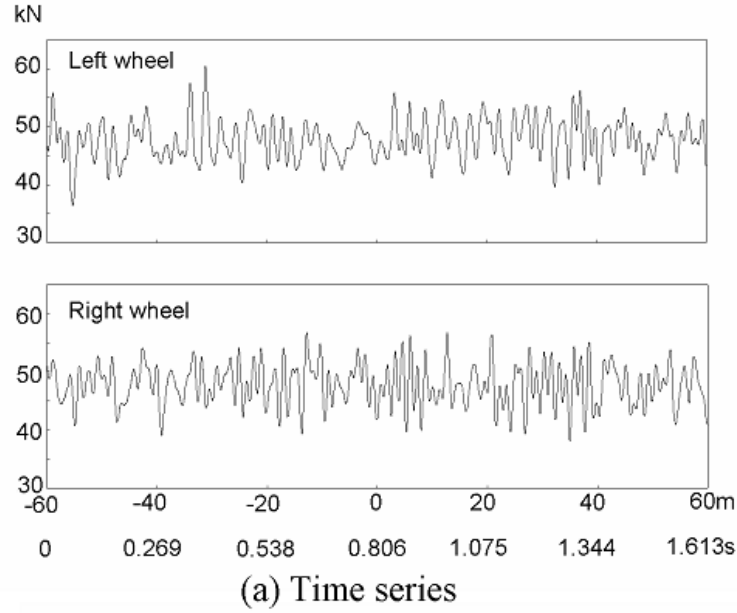


Fig. 4.12: Force on one wheel. (a) Waveforms. The distance on the horizontal axis corresponds to the x axis in Fig. 1. The train was running at 74.4 m/s; therefore, it covered 120 m in 1.613 s. (b) Amplitude spectra made by the transient component of the time series.

4.3 数値計算における移動振源の安定条件

数値計算は離散的空間で行われるため、数値的な安定条件が存在する。点振源に対する安定条件は、先に述べた通りである。ここでは、移動振源を扱うために考慮すべき安定条件について述べる。

4.3.1 線路長の安定条件

FEM や FDM といった、有限空間におけるシミュレーションは、無限遠との接続には問題にあった技巧的手段により解決する。しかし残念なことに、無限長の線路をこのようなシミュレーションで再現する手段は見つかっていない。結局のところある程度の長さで打ち切って、それより遠くから来る波は無視できるほど小さいというあいまいな制約で行わざるを得ない。この移動振源に対する、解析的表現方法については著者らによる文献(吉岡ら, 2006)を参照されたい。

そこで本章では、このあいまいな制約をできる限り具体的な線路長で示す。表面波のグリーン関数である

$$G(r, \omega) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp \left\{ -\frac{\omega r}{2Qc} \right\} \exp \left\{ -i\omega \frac{r}{c} \right\} \quad (4.13)$$

を使用する。移動振源は

$$f(x, 0, t) = \delta(t - x/V) \cos(x\omega_0/V) \quad (4.14)$$

とする。この式 4.14 のデルタ関数の項を列車同期成分とよび、列車速度 V で振源が移動するときの列車の平均重量の単位入力量となる。また、式 4.14 の余弦関数の項を位置同期成分とよび振動数 ω_0 の変動荷重の単位入力量となる。式 (4.13) と式 (4.14) を線路方向に積分しながら掛け合わせる、つまり

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \exp \left\{ -\frac{\omega r}{2Qc} \right\} \exp \left\{ -i\omega \frac{r}{c} \right\} \exp \left\{ -ix \frac{\omega - \omega_0}{V} \right\} dx \quad (4.15)$$

なる量 J は x 軸を線路にとった場合、 $x = 0$ 上での表面波応答となる。ただし、実際には負の周波数成分

$$J' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \exp \left\{ -\frac{\omega r}{2Qc} \right\} \exp \left\{ -i\omega \frac{r}{c} \right\} \exp \left\{ -ix \frac{\omega + \omega_0}{V} \right\} dx \quad (4.16)$$

との和で $(J + J')/2$ が厳密な応答となる。しかしながら、列車速度 V が地盤の波動伝播速度 c を超えないという条件のもと以下の説明では、 $\omega > 0$ において J' は無視できるほど小さいため式 (4.15) について議論を行う。シミュレーションにおいては無限

大からの積分ではないということと、式 (4.15) は解析的に積分できないことをふまえて、式 (4.15) を離散化した

$$J = \sum_{n=-N}^N \frac{S}{\sqrt{r_n}} \exp \left\{ -\frac{\omega r_n}{2Qc} \right\} \exp \left\{ -i\omega \frac{r_n}{c} \right\} \exp \left\{ -inS \frac{\omega - \omega_0}{V} \right\} \quad (4.17)$$

において N がどれくらいの小ささで積分値 J が収束しているかどうかを判断すればよいわけである。ここで、

$$r_n = \sqrt{(nS)^2 + y^2}$$

である。なお、ここでは Q 値の設定が重要になる。後述するとおり地表面近くでは基盤岩も含めて Q 値は 10 を超えない。よって、安全評価のために $Q=10$ とする。これを用いて、離散化したときの振源間隔 $S=0.5\text{m}$ としたとき、 $N=60, 120, 240, 1200$ での式 (4.17) の値をプロットしたものが、図 4.13(a) ~ 4.13(c) である。線路長はそれぞれ 60m, 120m, 240, 1200m で、1200m での値をどこまで短くできるかを考えることができる。列車速度 V は 75m/s とし地盤の波動伝播速度 c は 100m/s とする。

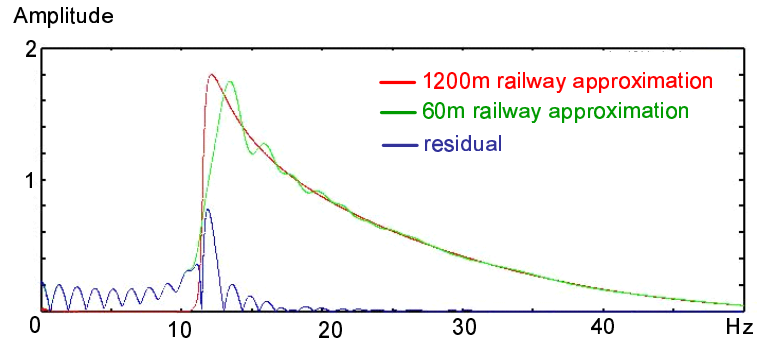
Fig. 4.13(a) は 1200m 線路長と 60m 線路長と間の残差とは、2 つの要素からなる。1 つは振源式 (4.14) のデルタ関数項が線路の両端で打ち切られるために発生する誤差である。2 つ目は、式 (4.14) の余弦関数項が線路の両端で打ち切られるために発生する誤差である。つまり、Fig. 4.13(a) の残差が示すように、線路が有限長であるために十数 Hz のところで最大 50 % 近い誤差がある。しかし 20Hz 以上の成分で誤差は非常に小さくなる。これは Q 値によって高周波数ほど振幅の減衰が大きくなるためである。

まとめ

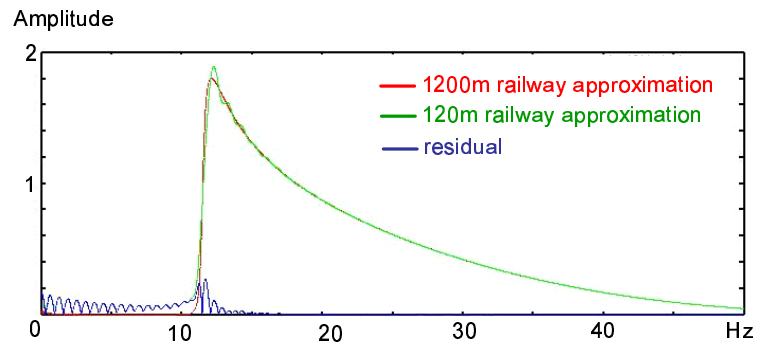
240m の線路長があれば、線路長が有限であることによる誤差は 10 パーセント以下となり、非常に良い精度で解析ができる。120m の線路長であっても、10Hz 前後に 10 パーセント程度の誤差があるが全体の応答を考えれば、良い精度で解析ができる。60m の線路長でも限定した箇所 (たとえば高架橋連結部) からの応答を解析するぶんには有限長からの応答を分解してその限定した波を解析することができると考えられる。

4.3.2 グリッド間隔の安定条件

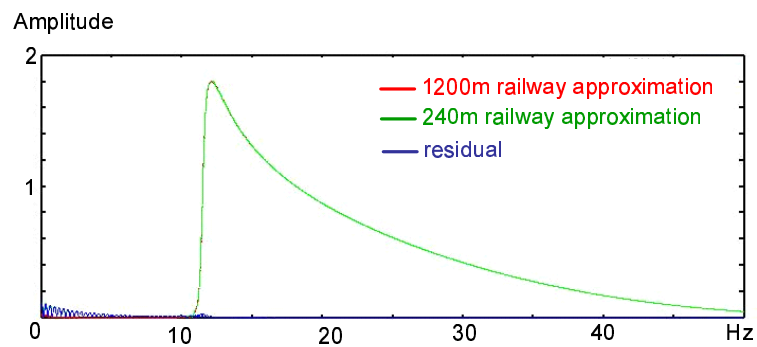
線路長とは別にもう一つ数値計算上重要な安定条件がある。それが、グリッド間隔である。差分法、有限要素法などの離散的数値計算において、点振源においても最短波長に対して 6 ~ 8 グリッドが必要とされる (Marfurt, 1988)。さらには、連続な線路を



(a) 60 m railway approximation



(b) 120 m railway approximation



(c) 240 m railway approximation

Fig. 4.13: First stability condition for the moving source problem. Using Eq. (4.17), the stability condition for railway length are evaluated. (a) 60 m, (b) 120 m, (c) 240 m railway approximations are compared to 1200 m railway approximation.

離散化することに対する安定条件も考慮しなければならない。そこで、式 4.14 の中の、列車位置の移動を表すデルタ関数の項のみを抽出した移動振源

$$f(x, 0, t) = \delta(t - x/V) \quad (4.18)$$

を用いる。また、グリッド間隔が荒いために発生するかどうかをいう波を議論するので、粘性減衰を導入する必要はない。そこで伝達関数には

$$G(r, \omega) = \frac{1}{r} \exp \left\{ -i\omega \frac{r}{c} \right\} \quad (4.19)$$

を使用する。この時、式 (4.15) と同様にこの移動振源と伝達関数から生み出される波動場は、

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \exp \left\{ -i\omega \left(\frac{r}{c} + \frac{x}{V} \right) \right\} dx \quad (4.20)$$

となる。そして移動振源に式 (4.18)、伝達関数に式 (4.19) を用いた恩恵として、式 (4.20) は積分され、 $c > V$ において

$$I = 2K_0 \left(\frac{\omega y}{c} \sqrt{\left(\frac{x}{V} \right)^2 - 1} \right) \quad (4.21)$$

という修正ベッセル関数を用いた解析解が導出される。ちなみに、式 (4.20) が複素数なのに対して、この式 (4.21) は実数である。これは、一過性の変形であって、純粹は波動ではない。ここからも、列車が静かに走行している場合は、地盤振動が発生しないことがわかる。こうして、前章と同様にして式 4.20 を離散化した

$$I = \sum_{n=-N}^N \frac{S}{r_n} \exp \left\{ -i\omega \left(\frac{r_n}{c} + \frac{nS}{V} \right) \right\} \quad (4.22)$$

と式 (4.21) を比較検討することによって、連続的な線路を離散空間で表現するためのグリッド間隔に対する安定条件を導くことができる。

Fig. 4.14 は、式 (4.15) の絶対値を $S=0.25\text{m}$ と $S=1.0\text{m}$ での応答を比較したものである。列車速度 $V=75\text{m/s}$ 、地盤速度 $c=100\text{m/s}$ で線路長は $NS=60\text{m}$ となるように設定する。解析解は式 (4.21) によって求める。以下 2 点の特徴を考察する。

1. グリッド間隔 1.0m では、 42Hz 以上にピッチ方移動振源に相当する地盤振動が計算される。列車速度 75m/s をグリッド間隔 1.0m で割ると 75Hz の周波数で振源が移動していることになる。これよりさらにドップラー効果によって 42Hz まで周波数が小さくなるというわけである。
2. 5Hz 以下に解析解との誤差がある。これは、やはり湧き出しによるものであり、定量的な誤差については前節で説明したとおりである。

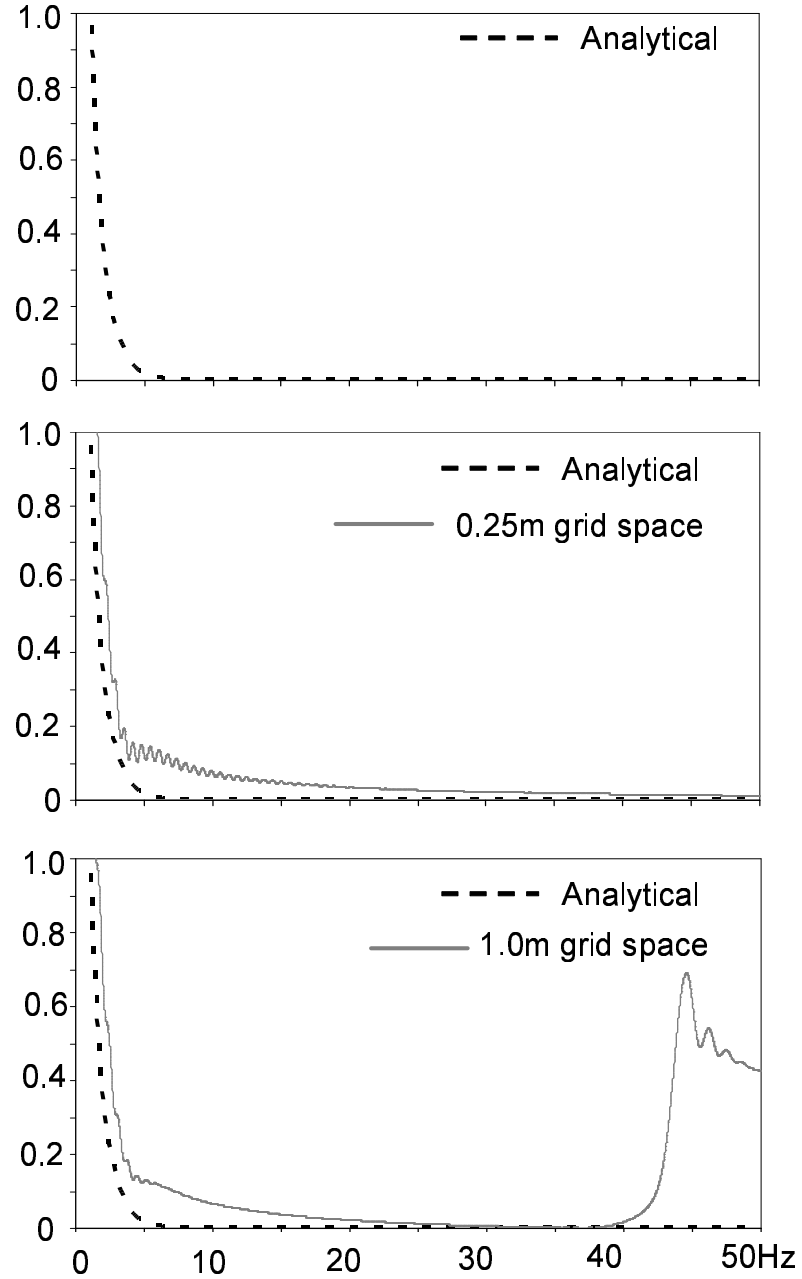


Fig. 4.14: Responses from the average component of force from a moving source in 2D acoustic space. The analytical value can be obtained from Eq. (4.21) and approximate values from Eq. (4.22) under the conditions $c = 100$ m/s, $V = 75$ m/s, $y = 10$ m, and $S = 0.25$ m or 1.0 m. The approximation of $S = 1.0$ m manifests an error at 43 Hz or more.

まとめ

列車速度 75m/s 以下で地盤速度が 100m/s 以上であれば, 1m のグリッド間隔ならば, おおむね 40Hz 以下の周波数は線路が連続なときの応答とみなしてよい.

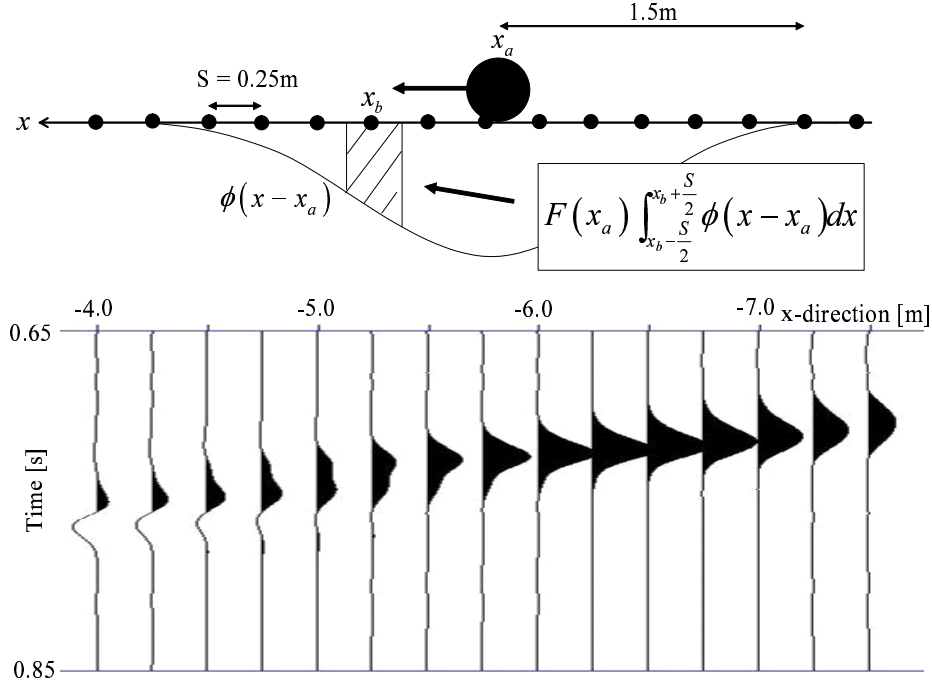


Fig. 4.15: Illustration for making numerical moving source. Upper panel illustrates the force distribution function of Eq. (4.23). Lower panel shows the time series of input waveforms. The time slice of the lower panel shapes Eq. (4.24).

4.4 シミュレーションに用いるパラメータの決定

4.4.1 移動振源の与え方

作用-反作用の法則により、地盤が列車から受ける力とこの車輪にかかる力は同じである。そこで、Fig. 4.12 に示した車輪にかかる力をから入力波形を作成する手順について述べる。枕木による力の分配効果は理論的に研究されており、これを利用することができる。その有力な理論として、Krylov 理論がある (Krylov, 1996)。Takemiya and Bian (2005) はスウェーデンの X-2000 高速列車の対して、レールのたわみ量の測定と Krylov 理論を比較することによってその理論が妥当であることを示した。さらに、鉄道技術者のためのマニュアルにも、この理論は採用されている (鉄道総研, 1992)。

測定結果から SMS 成分の (=47.4kN) を差し引き DMS を算出し、次の式により、力が地盤に分散して掛かっていると考え。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}Lc} \exp\left[-\left|\frac{x}{Lc}\right|\right] \sin\left[\left|\frac{x}{Lc}\right| + \frac{\pi}{4}\right] \quad (4.23)$$

ここで、 $Lc = 4/3\pi \times 1.5[\text{m}]$ である。これで得られた力を、最後に FD で計算する際の

グリッドの面積で割って圧力として入力波形を得る。新幹線に対してこの 1.5m という値は実験的にも証明されており (鉄道総研, 1992), 様々な地盤振動の研究に利用されている (竹宮ら, 1999; 竹宮ら, 2001; 原ら, 2004)。

Fig. 4.15 を用いて具体的に説明する。\$S\$ はグリッド間隔で前節で議論した安定条件より \$S = 0.25\text{m}\$ である。線路の上に静かに車輪が載っている場合のレールのたわみをうまく近似できているように見える。分布関数は不定積分が原始関数を用いて求められることや \$-\infty\$ から \$+\infty\$ の積分が 1 であるという利点がある。そこで, Fig. 4.12 で得られたある地点での力が, 実際はその点だけでなくこの関数 (4.23) という広がりをもっているということである。Fig. 4.15 を見るとわかるように力の影響が約 3 m という広がりをもっているので, 0.25 m のグリッド間隔で計算させる場合, 約 12 グリッド分の長さに力が分散される。即ち, 車輪が点 \$x_a\$ にあり, グリッド \$x_b\$ にかかる力は,

$$F(x_a) \int_{x_b - \frac{S}{2}}^{x_b + \frac{S}{2}} \phi(x - x_a) dx \quad (4.24)$$

である。従って, Fig. 4.15 の下側の図が, FDM の入力に使用する時系列である。

4.4.2 FDM で設定する地盤のパラメータ

盛土という, 比較的単純な構造を計算したい一方, 線路方向には, 計算領域 120m 以上を確保するという大計算を行うことになる。そこで, FEM よりも計算メモリが少ない FDM を適用し, 粘性については, リラクゼーションメカニズムが 1 つで, Blanch method を利用する。

V_p, V_s, ρ

Fig. 4.1 中の点 A において行なったボアホールの柱状図が Table. 4.1 である。その表の中の \$V_p, V_s\$ は PS 検層によって求めた。Fig. 4.5 は深度方向の \$V_p, V_s\$ のイメージである。密度は全て \$1500\text{kg/m}^3\$ とする。

盛土部分の物性

盛土部分の物性は,

- \$V_p = 800 \text{ m/s}\$
- \$V_s = 200 \text{ m/s}\$
- \$\rho = 1400 \text{ kg/m}^3\$

という経験的な値としている。

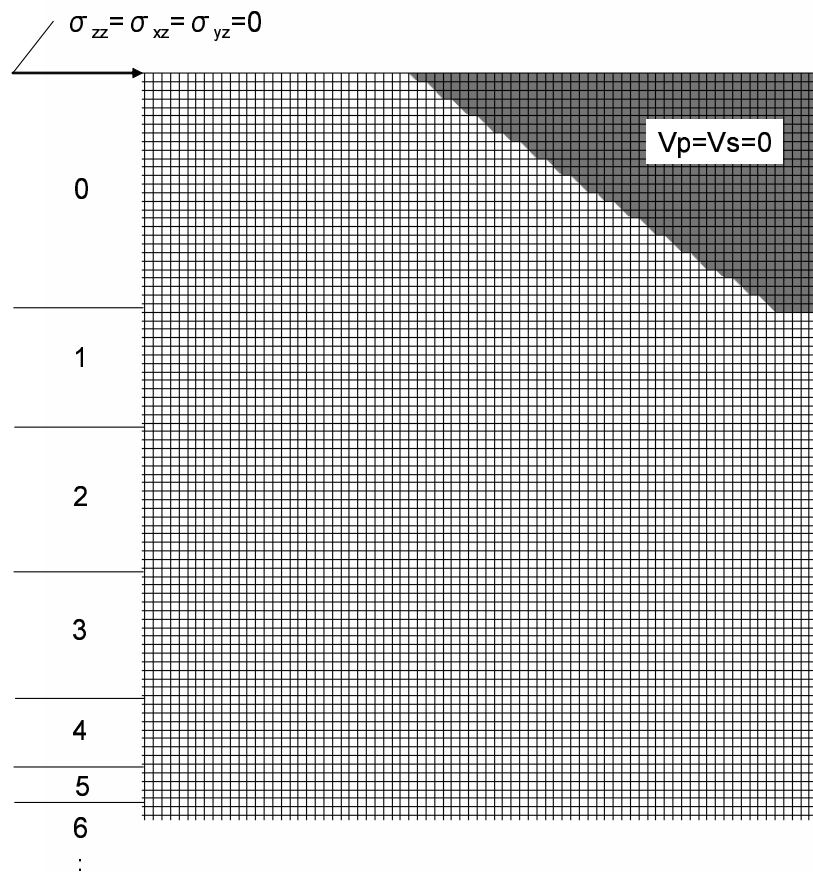


Fig. 4.16: The model illustration by FDM pixel arrangement. The material boundary between soil and vacuum exists at the midpoint of lattice points. The ID numbers of the layers in Table 1 are shown. The layer boundaries also exist at the midpoint of lattice points.

Table 4.2: Parameters used in simulation study. In this simulation study, $Q_p = Q_s$ is assumed.

ID	Depth m	V_p m/s	V_s m/s	Q	ρ kg/m ³
0	Embankment	800	200	5 ~ 50	1400
1	0.00 ~ 1.75	1000	120	5 ~ 50	1500
2	1.75 ~ 3.50	1000	150	5 ~ 50	1500
3	3.50 ~ 5.00	1000	240	5 ~ 50	1500
4	5.00 ~ 7.75	1900	240	5 ~ 50	1500
5	7.75 ~ 11.50	1900	180	5 ~ 50	1500
6	11.50 ~ 13.50	1900	240	5 ~ 50	1500
7	13.50 ~ 14.50	1900	430	5 ~ 50	1500
8	14.50 ~	1900	580	5 ~ 50	1500

Q_p, Q_s

現場において減衰パラメータは計測していない。減衰パラメータは計測方法も逆解析手法も確立されたものがないため手探りで最適な Q 値の設定を探す。Blanch method において、粘性中心周波数 $\omega = 2\pi \times 15\text{Hz}$ で、 $Q_0 = 15, 25, 50$ と、 $\omega = 2\pi \times 15\text{Hz}$ で、 $Q_0 = 5, 6, 7.5$ の計 6 ケースの計算結果を比較検討する。また、全ての地層において $Q_p = Q_s$ と想定する。これは、粘性が低温-低圧下になると Q_p と Q_s の比が 1 に収束する傾向があるという近年の実験的研究を参照した (Leurer, 2004)。

まとめ

まとめると FDM に用いたパラメータは Table. 4.2 のようになる。グリッド間隔を 0.25m に設定しているので層の厚さは PS 検層による層圧より若干異なる。また、左右の車輪が位置するのは Fig. 4.1 の左上に記載されている。ただし、右、左とは東京を背にした場合の方向を指す。

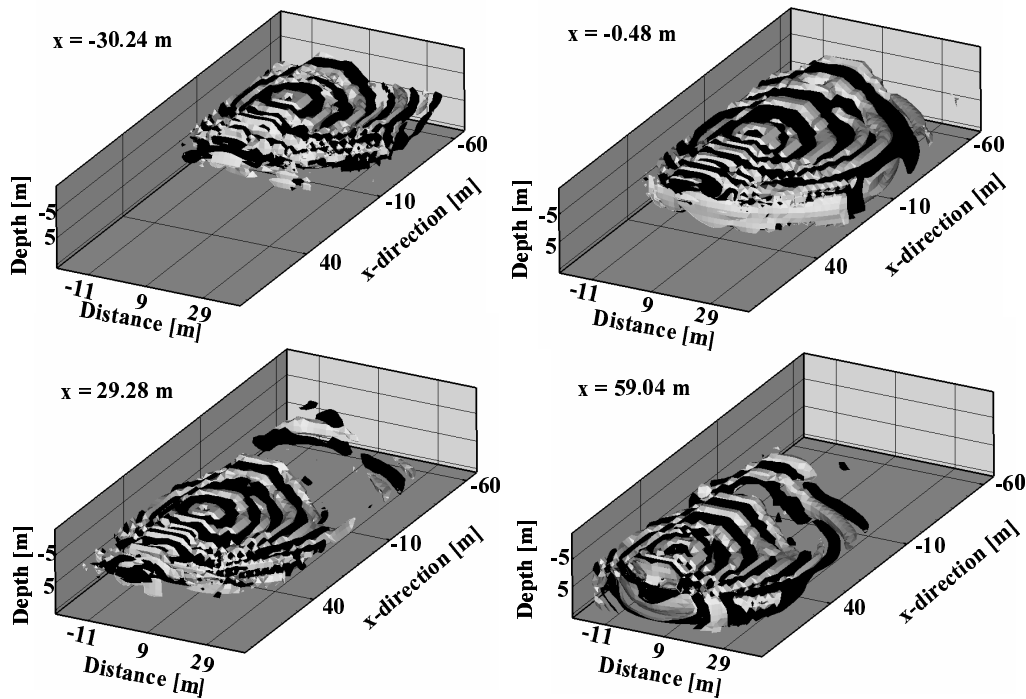


Fig. 4.17: Wavefield snapshot obtained by numerical simulation for various locations of a single axle. These show the isosurface of the vertical component of particle velocity.

4.5 シミュレーション結果

前節まで説明に従って入力波形と地盤モデルにより差分法によって数値計算を行った結果を示す。列車速度は 74.4 m/s に設定し, 73.2 m/s で走行する列車を対象に観測されたインラインアレイ記録や, シミュレーションと同じ 74.4 m/s で走行する列車を対象に観測された Fig. 4.1 の A 点, B 点での地盤振動記録との比較を行った。

4.5.1 スナップショット

まず, Fig. 4.17 に差分法シミュレーションによって可視化した深度方向の粒子速度のアイソサーフェスによるスナップショットを示す。左上は車軸の位置を表す。車軸を中心に同心円を描くように車軸が移動していることがわかる。車軸の前方は波長が密で, 後方は疎であるように見える。

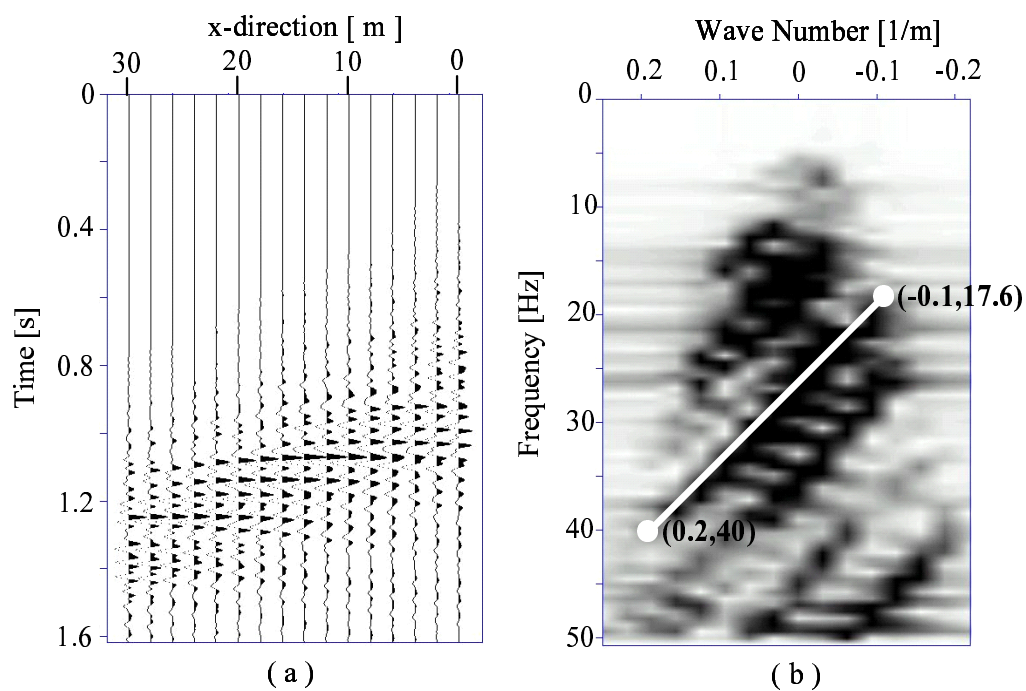


Fig. 4.18: (a) Vertical component acceleration waveforms obtained by numerical simulation. A total of 16 receivers are located at 2 m intervals in an in-line array as shown in Fig. 4.1. (b) FK spectrum of (a). A sloping distribution is seen representing the Doppler effect indicated by Eq. (4.9).

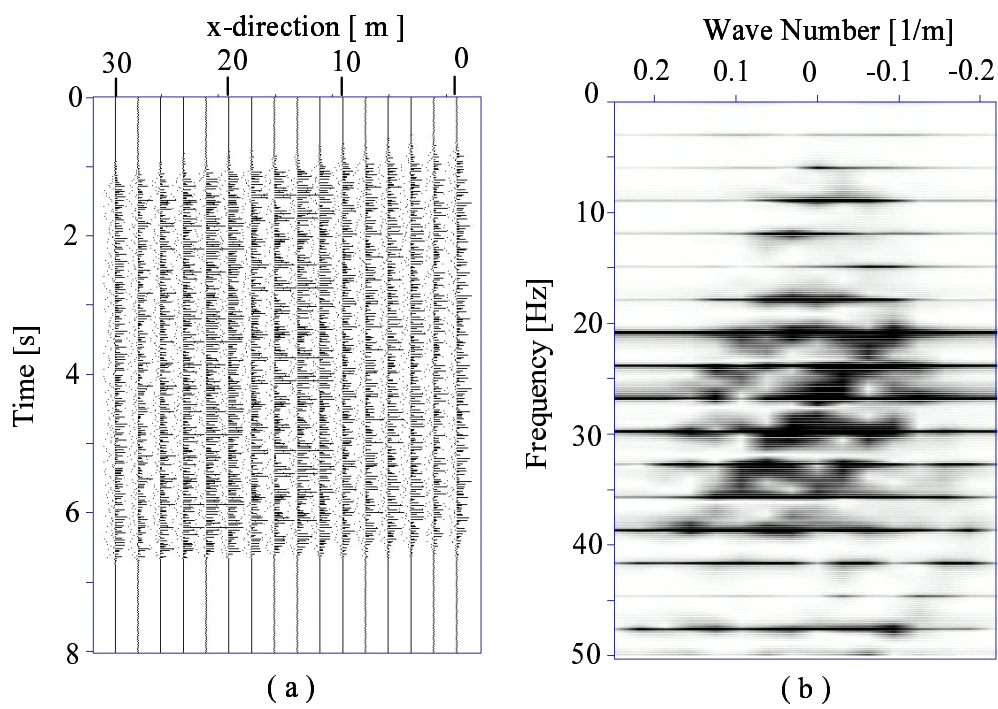


Fig. 4.19: (a) Superposed waveforms of Fig. 4.18(a), (b) FK spectrum of (a). This aspect of the spectrum is similar to the field data in Fig. 4.10.

4.5.2 インライン応答

Fig. 4.18 は現場の見取り図 4.1 のインラインアレイと同じ点で観測した記録である。(a) は波形を並べたもの、(b) は (a) の FK スペクトルである。ドップラー効果を示すスペクトル分布の式 (4.9) の通りに直線上に分布している。この図に書き込んだとおり、点 $(-0.1 \text{ /m}, 17.6 \text{ Hz})$ と点 $(0.2 \text{ /m}, 40 \text{ Hz})$ のような 2 点を選ぶと傾きはちょうど 74.4 となり列車速度に一致する。

Fig. 4.19 は Fig. 4.18 を Fig. 4.7 のような車軸配置を考慮して、重ね合わせることで算出した全 64 車軸からの応答をシミュレートしたものである。式 (4.3) や Fig. 4.8 に示したように、軸スペクトルの影響によって全軸からの応答は線スペクトル化し、現場データの Fig. 4.10 との外観が良く似るようになる。

4.5.3 Q 値の違いによる振幅の変化

最後に、振幅スペクトルと時系列の再現によって量的な比較を試みる。Table. 4.3 に Q 値を変えて行った 6 ケースのシミュレーションの 10 個の周波数における振幅値をまとめた。その中から、さらに 4 ケースに絞って、Fig. 4.20 にシミュレーションによる点 A と点 B の振幅スペクトルの比較を示す。Fig. 4.20(a) は 15Hz 中心で $Q_p = Q_s = 50$ にしたもの、同様に、(b) は 15Hz 中心で $Q_p = Q_s = 15$ 、(c) は 30Hz 中心で $Q_p = Q_s = 6$ 、(d) は 30Hz 中心で $Q_p = Q_s = 5$ のシミュレーション結果である。現場データをとった列車の速度は 74.4 m/s のものを用いた。

Q 値の設定方法や局所的なパラメータの設定で、現場を完全に再現することはできないが、Q 値も 5 ~ 30 という値は h 値で 0.3 % ~ 10 % に換算できる。これは、地表面付近の物性値として現実的な値に収まっているといえる (Xia et al., 2002; Foti, 2003)。

最後に、Fig. 4.21 にシミュレーションと現場記録の時系列を示す。列車速度 74.4 m/s を 25 m の 1 車両の長さで割った約 0.3 秒の良く似た波の繰り返しや、振幅の絶対値は良く現場データと似ている。現場データは、各車両からある程度不規則な波が到来していることがわかる。

考察

シミュレーション結果は Fig. 4.6(b) と同様に、式 (4.3) によって与えられたピークスペクトルに支配されていることがわかる。便宜的に 8.9 と 11.9 の 2 つのピークを低周波側、17.9, 20.8, 23.8, 26.8, 29.7, 32.7, 35.6 および 38.6Hz の 8 つのピークを高周波側と呼ぶことにする。高周波側では、観測点 A (盛土端部から 2.5m) では $Q_p = Q_s = 5$ 、観測点 B (盛土端部から 15m) では $Q_p = Q_s = 6$ のケースが現場データに最も近い。これは盛土の減衰効果が自然の地盤より粘性が大きいことを示している。高周波側に関しては、低い Q 値のシミュレーションが現場記録と良い合と言える。ただし、第 2.4.5 節で述べたように、 $L=1$ の Blanch method で Q がある程度小さいため、ここで与えた

Q 値より 1~2 程度大きいことに注意しなければならない。しかし、いずれにせよ、この Q 値が小さいという傾向は表面の近くの物理探査の分野においてよく見られる現象である (Xia et al., 2002; Foti, 2003)。

低周波側は、6 つのシミュレーションでの振幅は全て、現場記録より小さかった。これは、4.3 節で示唆した、シミュレーションにおける鉄道長の不足によると推察できる。また一般に、低周波ほど長い距離を伝播するので、検層を行った地点から離れた地質の違いによっても考えらる。また、現場記録とシミュレーション記録の不一致の原因として、地面振動を計測した日時と車両は車輪にかかる力を計測したそれと異なるということも考えられる。

Fig. 4.6(b) の点 B での記録には、14.9Hz の応答があるが、シミュレーションで再現されない。あるいは、Fig. 4.21 での比較から、現場記録はある程度ランダム性が認められのに対し、シミュレーションは完全に規則な繰り返しを見ることができる。これら 2 つの現象は、全車軸からの応答が互いにわずかながら異なっていることに起因すると考えられる。しかし、実用的なシミュレーションに対して、あらゆる車軸からの応答が同じであるという仮定は十分である。

Table 4.3: Peak values collection of 6 cases; $Q = 5, 6, 7.5, 15, 25, 50$

Point A							
Hz	FIELD	Q=50 (15Hz)	Q=25 (15Hz)	Q=15 (15Hz)	Q=7.5 (30Hz)	Q=6 (30Hz)	Q=5 (30Hz)
8.9	2.06	1.24	0.98	0.80	0.52	0.43	0.31
11.9	1.18	0.69	0.59	0.54	0.63	0.57	0.52
17.9	1.50	2.05	1.64	1.36	1.12	0.97	0.82
20.8	3.31	15.25	12.57	9.96	5.52	4.19	3.19
23.8	1.07	3.19	2.41	1.82	0.82	0.63	0.47
26.8	0.96	17.60	14.60	11.62	5.42	4.08	3.03
29.7	2.80	5.79	4.31	2.70	1.46	1.33	1.12
32.7	0.24	5.37	4.51	3.44	1.55	1.06	0.76
35.7	0.23	5.39	4.34	2.93	0.11	0.17	0.13
38.7	0.74	11.54	7.65	4.41	1.33	1.08	0.94
Point B							
8.9	1.60	0.70	0.57	0.49	0.71	0.72	0.71
11.9	0.96	0.76	0.64	0.50	0.36	0.26	0.19
17.9	0.99	0.72	0.60	0.43	0.37	0.32	0.25
20.8	1.65	2.27	1.79	1.33	0.76	0.48	0.31
23.8	0.55	5.30	3.46	2.11	0.39	0.18	0.08
26.8	0.14	8.31	5.52	3.36	0.63	0.34	0.19
29.7	0.55	15.91	11.03	6.91	1.38	0.73	0.39
32.7	0.36	6.99	4.82	3.38	0.66	0.34	0.18
35.7	0.15	5.48	4.16	2.87	0.50	0.26	0.14
38.7	0.50	18.64	12.37	7.64	0.76	0.37	0.20

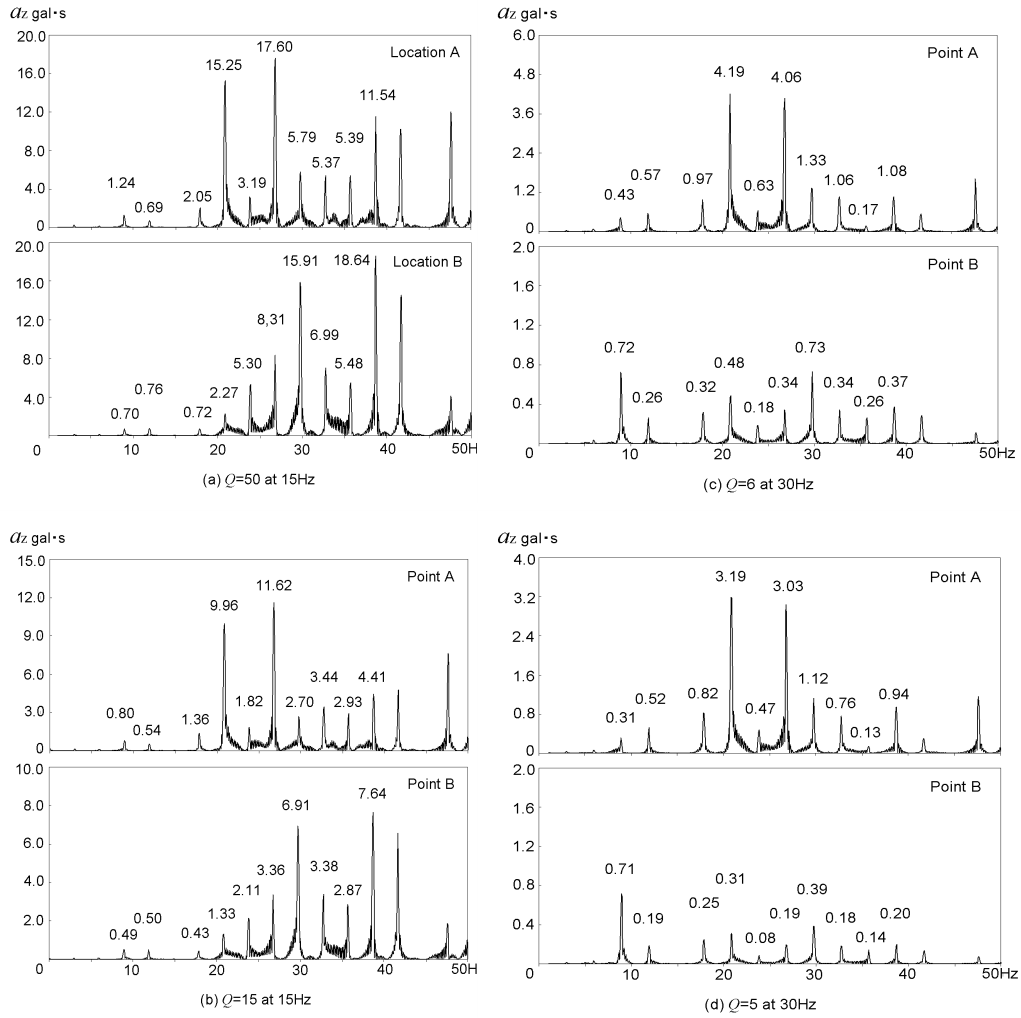


Fig. 4.20: Simulated ground vibrations for four individual Q settings. (a) $Q_p = Q_s = 50$ and 15 Hz (b) $Q_p = Q_s = 15$ at 15 Hz (c) $Q_p = Q_s = 6$ at 30 Hz (d) $Q_p = Q_s = 5$ at 30 Hz.

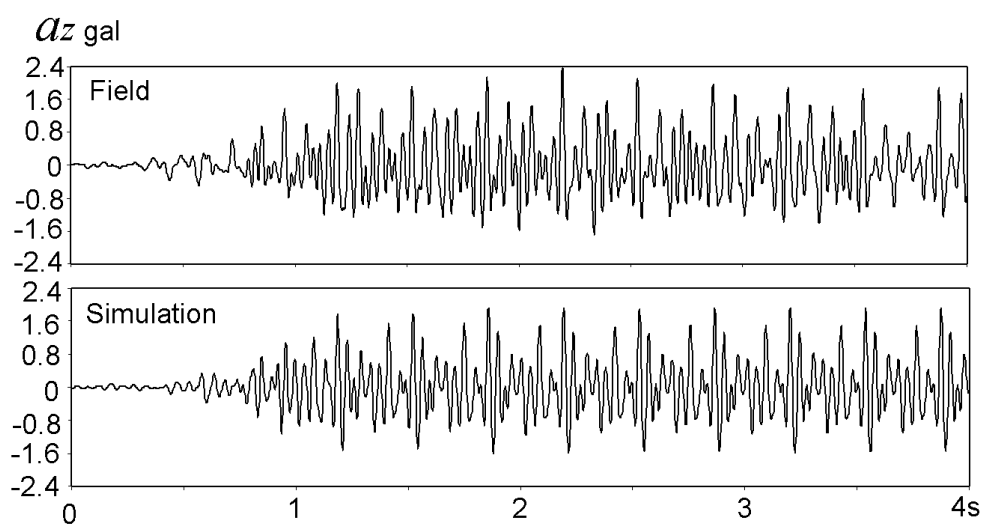


Fig. 4.21: Comparison of the simulation data with the field data in the time domain at location A. Simulation data are obtained by combining two cases of $Q_p = Q_s = 50$ and $\omega_0 = 2\pi \times 15$ Hz and $Q_p = Q_s = 5$ with $\omega_0 = 2\pi \times 30$ Hz. A 40 Hz low pass filter is applied to both the simulation and field data.

4.6 まとめ

列車の車輪にかかる力を入力波形として, FDM による波動伝播シミュレーションを行った. 結果, 現場データと良く似た出力を得ることができた. つまり地盤振動という現象に対して, 粘弾性体に鉛直方向に働く力による応答であるという物理的枠組みを与えた. 鉛直方向に働く力とは, 列車の重量が何らかの原因によって場所によっていくらか変化して地盤が受けている力である (Fig. 4.12).

走行中の列車の車輪にかかる力の計測は, 特殊な車両および車輪を用いて行われるため, データ取得には難がある. 過去に著者らは, 他の研究グループと同様に, 軌道狂いと車両-線路構造物モデルという枠組みを考案した (神田ら, 2005). これは, 軌道狂いの計測が比較的容易であることや, 様々な列車速度で地盤に掛かる力を推定できる点は優れていた. 一方で, 今回の計測された力は, 長周期の成分を無制限に含んでおり, レール下の枕木, バラスト, 盛土, 支持地盤の堅さの不均質性を反映しているという点で, 基本的メカニズムの解明には適している. なぜなら, 振源力が既知であるため, 伝達系の波動論の妥当性に絞った議論が可能になるからだ. この力を利用して, FDM による波動伝播シミュレーションを行った. シミュレーション結果は 40Hz までの (環境問題に成り得る周波数帯) 応答を良く再現した. そして, この新たな枠組みにより, 観測データを完全には再現できない理由を, 地盤に対する設定の違いに絞り込むことができる. つまり, 粘性 Q 値と密度は経験的値を用いたこと, あるいは, 成層構造よりも詳細な局所的パラメータ違いがシミュレーションにおいて不完全であったと考えられる.

シミュレーション結果により, 15Hz 以上の周波数域では, $Q = 7.5$ の場合, 現場記録と良く合致した. このことから現場の地盤は強い粘性があるといえる. また, 現場記録にドップラー効果が観測されることが明らかになった. しかしながら, 8.9 と 11.9Hz という比較的低周波の応答や, 14.9Hz のにわずかな不一致があり, この主な原因は, 各 64 個の車軸からの発生している波動場がそれぞれわずかに違っていることによると考えられる.

あらゆる車軸からの応答は同じであり, DMS (Dynamic Moving Source) のみが地面振動を引き起こす, という 2 つの仮定を設けている. これらは計測上の問題や, 理論の簡単化のために設けたが, シミュレーション結果は地面振動現象を十分説明しているといえる. 一方で, これらの仮定が適用できない問題もあるだろう. 例えば, 特に都市部では列車は高架橋上で走行することもあり, 建造物による増幅現象なども考慮すべきであろう (Xia et al., 2005). このような問題を今後取り扱って行くためには, FDM よりも FEM が重要なツールになると考えられる. 次節では, FEM ベースの計算手法を, 当分野に適用した研究成果について述べる.

第5章 3次元FEM・DEFGMの応用

5.1 はじめに

本研究の、最終的な目的は、列車速度の高速化時の将来予測や、対策工の成果予測が行えるシミュレーションツールの作成である。当分野の基礎的メカニズムに関する研究は、弾性/粘弾性体のグリーン関数を用いた計算が行われてきた (Sheng et al., 2004; Lombeart et al., 2006)。前章に示したように、著者はFDMを利用した (Katou et al., 2006a)。近年、当分野へは、様々な計算手法の適用が提案されている。Hall(2003)はFEMを利用して、複雑な表面地形を評価した。O'Brien and Rizos(2005)やSheng et al. (2006)は、境界要素法 (BEM; Boundary Element Method) とFEMを結合させた計算手法を提案した。盛土等の比較的複雑な構造物にはFEMを、深部地盤等の比較的単純な構造に対してはBEMを用いている。Takemiya and Bian (2007)は高架橋を梁理論で解き、地盤をFEMで解く手法を提案した。このように、FEMを計算手法の中心に据えることで、さまざまな問題に対して柔軟な対応性をもたせることができる。

上記の背景に従い、本章では、3次元FEM・DEFGMを適用を試みる。第2章でも述べたとおり、近年数値計算の精度や汎用性は目覚しく進歩している。そこで著者は、第2、第3章での結果から、以下のような使用でプログラムを作成した。

- 空間精度3次, 時間精度2次
- PML吸収境界
- リラクゼーションメカニズム数: 3
- MPIによる並列計算

Fig. 5.1は3次元FEMにおける一つの要素のイメージである。 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 個の節点が1つの要素を形成している。従って要素形状は、2次関数によって表現される。第3章で示したように、空間精度3次のFEMは、自由表面を50波長以上、誤差なく伝播した。これは、この地盤振動の分野において十分である。逆に4次を超える空間精度を用いると、小さな構造に対する計算メモリや計算時間の効率が悪くなると考えられる。

著者らは、並列計算により3次元DEFGMが4次精度のFDMよりも高速化が望めることを示した (Katou et al., 2007a)。また、細かくパラメータを変化させることを必要とする波動散乱問題への適用も考案した (Katou et al., 2007b)。

この有力な3次元FEMおよびDEFGMによって、列車走行に起因する地盤振動の分野への適用を試みた。本章では、FEMの精度と並列計算による高速化の評価を行う。そして、より現実的な問題への適用として、高架橋連結部の補強と鋼矢板の地盤振動に与える効果をシミュレートする。

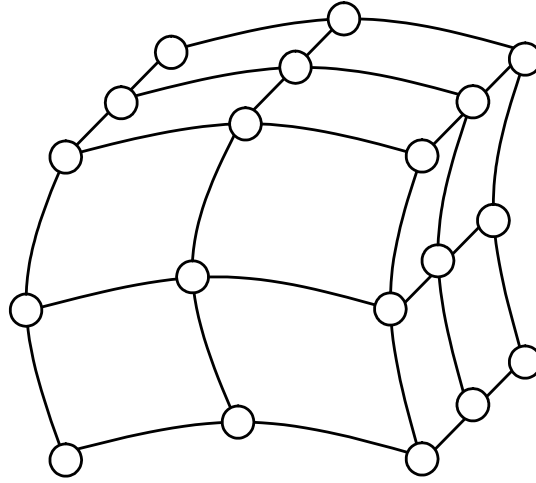


Fig. 5.1: Single element for 3D FEM.

5.2 3次元 FEM の並列アルゴリズムと計算精度

5.2.1 並列アルゴリズム

Fig. 5.2 は, 3次元粘弾性波動方程式を FEM で計算するフローチャートである. このフローチャートには, 並列計算を行うためのプロセスが含まれている. 並列計算は, プログラム言語 MPI(Message Passing Interface) を利用した (パチェコ, 2001). これは分散 m メモリ型並列計算に分類され, スーパーコンピュータのような巨大な共有メモリをもつ計算機だけでなく, PC クラスタでも並列計算が行える. プログラミングが比較的複雑になるが, 明示的にメモリを分割するため, 共有メモリ型の並列計算よりも高速化することが多い (加藤, 2005). Fig. 5.3 にプロセッサ間のデータ交換を模式的に表したものである. 左側のプロセッサから右側のプロセッサへ (逆方向に関しても同様に), 点線で囲った部分に配置されている粒子速度を実線で囲った部分へと上書きする.

要素数 $40 \times 40 \times 40$ のテストモデルを使用する. Fig. 5.4 にテストモデルの略図と各 x, y, z 方向の分割数を示す. 外部ファイルへの入出力の部分は省いたプログラムを使用した. タイムステップ数は 100 である. また, 使用した計算機は, スーパーコンピュータ (京都大学大型計算機 HPC2500) と PC クラスタ (Intel 社 Xeon Quad-core が 8 個で構成され, 最大 32 並列が可能) である.

Fig. 5.5 に計算時間を示す. スーパーコンピュータも PC クラスタも同様の高速化を示した. また, Fig. 5.5(b) は 1 プロセッサでの計算時間を N 個のプロセッサを使用したとき,

$$Value(N) = CPUtime(1) \div CPUtime(N) \div N \quad (5.1)$$

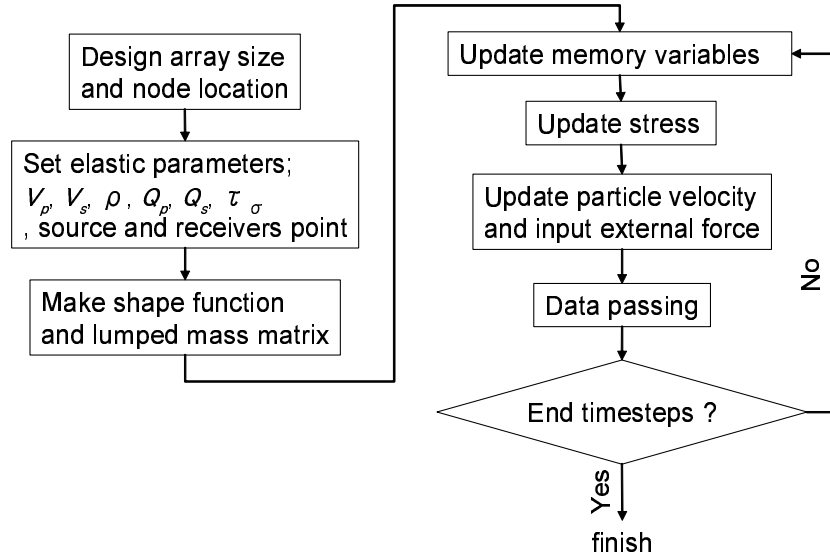


Fig. 5.2: Computation flow chart for 3D FEM with parallel computing.

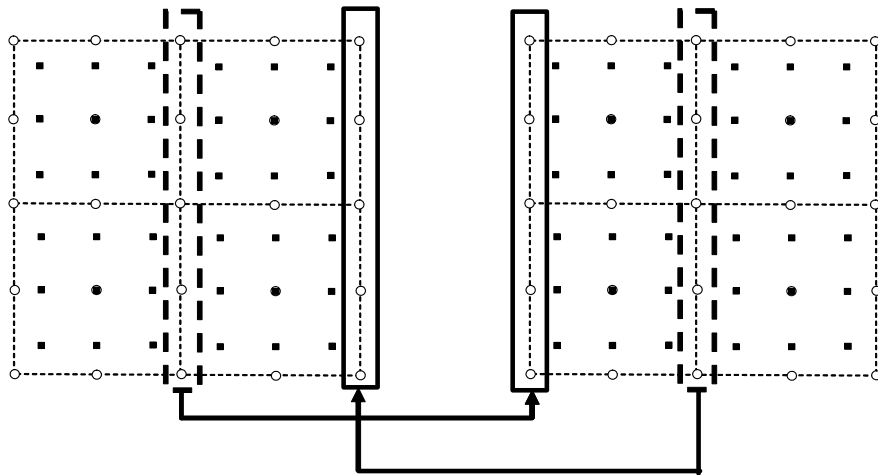


Fig. 5.3: Schematics of message passing.

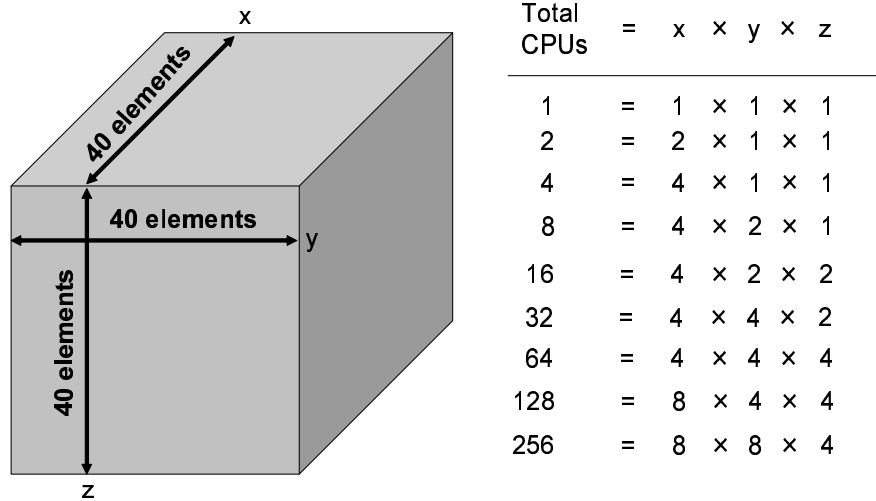


Fig. 5.4: Left panel shows the total calculation space. Right table shows the numbers of division for each direction.

によって算出される値である。N 個のプロセッサを使えたときに 1 個での計算時間より N 倍以上速くなったかどうかを表している。この値が大きい時ほど、並列化効率が良いということになる。ほとんどの CPU 数において、この値は 1 を超えている。この現象は、キャッシュメモリサイズや FSB 等の PC 内部における通信速度に関連していると推測される。例えば、分散メモリ型の並列計算は、メモリ使用量がコンパクトになるため、CPU がメモリ内のデータを探す時間等も低減しているということである。

FDM の場合、粒子速度だけでなく応力もデータパッシングの対象となるため、FEM よりもデータパッシング量が多くなる。このため FEM の並列化効率は FDM よりも良いことも示されている (Katou et al., 2007a)。

5.2.2 計算精度

Fig. 5.6 に示した 3 つのモデルに対して精度の比較を行った。

- (a) は、弾性体の半無限空間の波を計算する。自由表面に鉛直下向きの力を与える。このモデルは、斎藤 (1993) から解析解を求める。
- (b) は、弾性体の全無限空間で、鉛直方向の応力を与える。このモデルは、Kennett (1979), (1980) の準解析解法リフレクティビティ法 (RM;

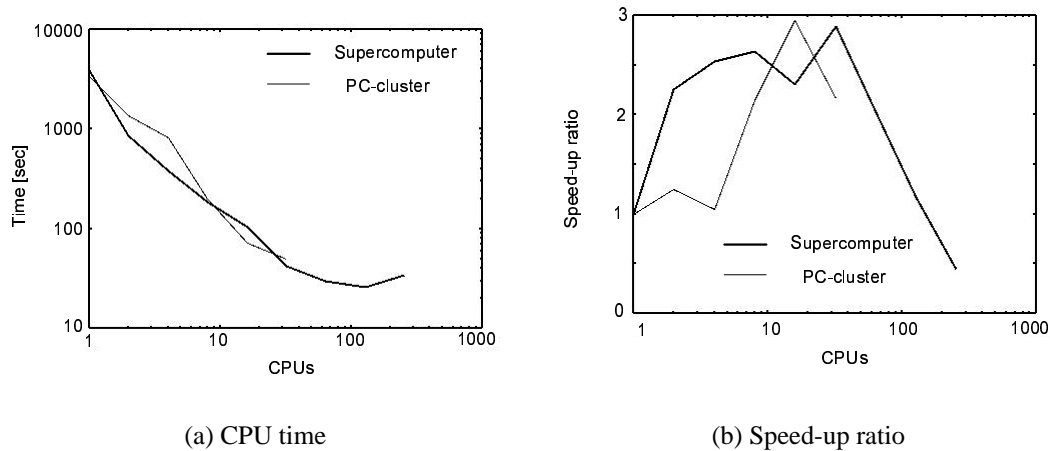


Fig. 5.5: CPU time reduction by parallel computing.

Reflectivity Method) を用いる。ただし、計算プログラムは、SPICE Homepage (<http://www.spice-rtn.org>) より入手した。

- (c) は、粘弾性体の全無限空間で、鉛直方向の応力を与える。このモデルも、(b) と同様に準解析解を求める。

各計算における入力パラメータを Table. 5.1 にまとめる。振源関数は、2Hz ピークの Ricker wavelet を用いた。RM は、完全な constant Q によって計算されているため位相速度 $c(\infty) = \infty$ となってしまう。つまり入力速度は、応答スペクトルのもっとも大きい周波数での位相速度を用いる。Käser and Dumbser (2007) にもあるように、2Hz ピークの Ricker wavelet に対しては、2.5Hz での位相速度を入力するのが適切である。ゆえに、ケース (c) は、式 (2.71) より求めた、2.5Hz での位相速度が RM における速度の入力値とした。

計算結果

Fig. 5.7 ~ 5.9 に計算結果を示す。ケース (a) の場合、FEM と解析解は完全に一致する。ケース (b) も FEM と RM は完全に一致する。ケース (c) に関しては、わずかに不一致がある。

斎藤 (1993) の解析解は、留数定理とベッセル関数の漸近展開等を用いて、特異点や無限大での積分を全て解析的に解いている。このケース (a) の結果から FEM が十分な精度を持つと判断できる。これと比べて RM は、特異点や無限大を含む積分を直接数値積分によって解くため、誤差がいくらか存在する。それでも、ケース (b) では FEM と RM は良く一致しているので、お互いに精度の良い計算手法であると言える。

Table 5.1: Parameters for accuracy tests. Blank parts mean N/A.

	(a) Elastic halfspace	(b) Elastic wholespace	(c) Viscoelastic wholespace (FEM)	(c) Viscoelastic wholespace (RM)
Upper				
V_p m/s	3500	3500	3500	3460
V_s m/s	2000	2000	2000	1955
ρ kg/m ³	2500	2500	2500	2500
Q_p (FEM 0.1Hz)			77.5	
Q_s (FEM 0.1Hz)			39.0	
Q_p (FEM 1.0Hz)			76.5	
Q_s (FEM 1.0Hz)			38.5	
Q_p (FEM 10Hz)			77.5	
Q_s (FEM 10Hz)			39.0	
Q_p (RM)				80
Q_s (RM)				40
Lower				
V_p m/s		4300	4300	4275
V_s m/s		3000	3000	2966
ρ kg/m ³		3000	3000	3000
Q_p (FEM 0.1Hz)			155	
Q_s (FEM 0.1Hz)			77.5	
Q_p (FEM 1.0Hz)			154	
Q_s (FEM 1.0Hz)			76.5	
Q_p (FEM 10Hz)			155	
Q_s (FEM 10Hz)			77.5	
Q_p (RM)				160
Q_s (RM)				80

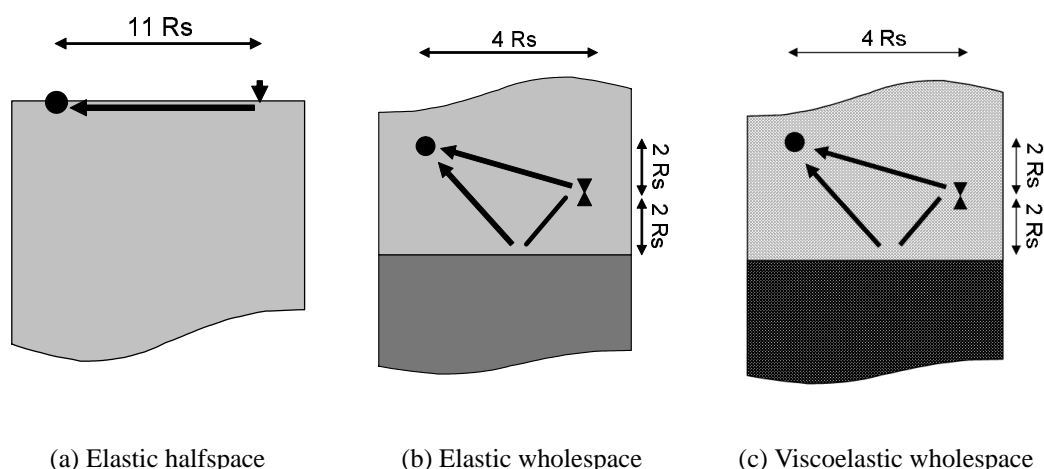


Fig. 5.6: Three models for testing numerical accuracy of 3D FEM. R_s means the distance normalized by S-wavelength for 2 Hz peak Ricker wavelet.

粘性を評価するケース (c) の場合, FEM が SLSM から導出されている一方で, RM は constant Q であるという理由から完全に一致しないのは当然である. 注目すべきは, 粘性によって, ケース (b) から同じ程度振幅が小さくなっているということである. 著者の知識に寄れば, 当 FEM は, 現在最も精度の良い計算手法と考えられる, Komatitsch and Tromp (2002) の SEM, Käser and Dumbser (2007) の ADER-DG, Carcione (1994) の PS-FDM に匹敵した精度であると結論付けることができる. さらに当 FEM は, 空間精度がこれらより小さいため, 複雑な構造に対する汎用性が高い. また, PML を導入しているという点も新規的である.

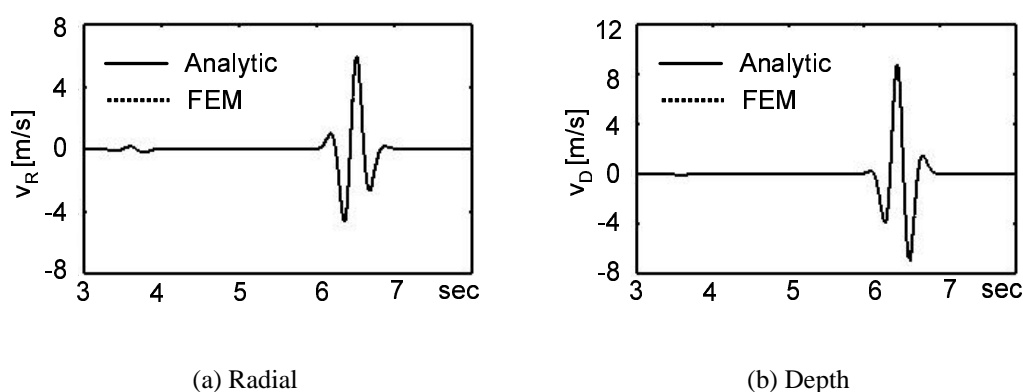


Fig. 5.7: Result for elastic halfspace model.

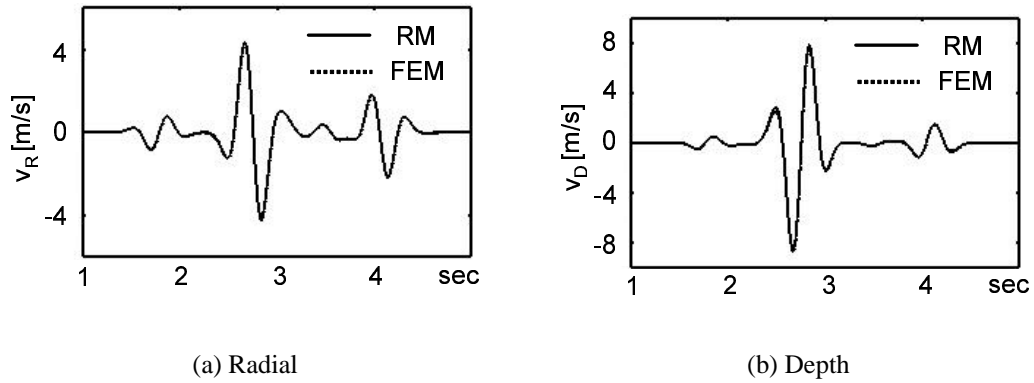


Fig. 5.8: Result for elastic wholespace model.

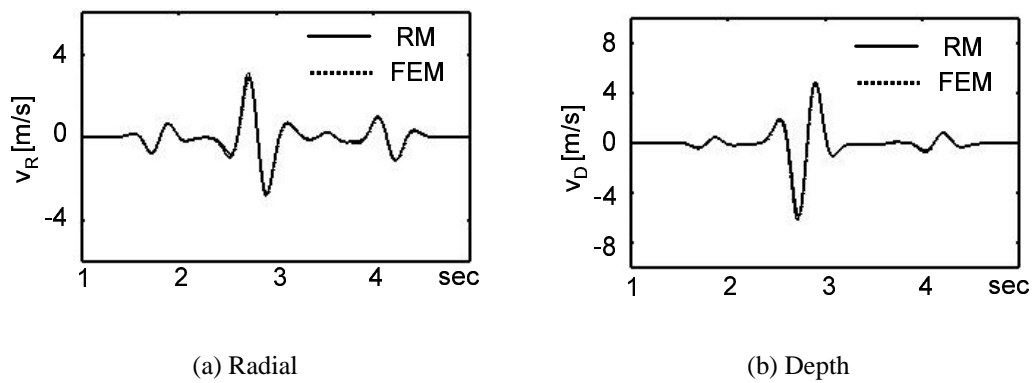


Fig. 5.9: Result for viscoelastic wholespace model.



Fig. 5.10: A picture of a reinforced viaduct. This picture is from Hara et al. (2004).

5.3 高架橋連結部の補強が地盤振動に与える影響の評価

付録 B に記した, DEFGM と梁理論の混合計算アルゴリズムを用いて, 高架橋補強工事の地盤振動低減への効果を評価する.

Fig. 5.10 のように高架橋連結部を鉄鋼部材を用いて X 字に補強する工事がある. この工事は, 地盤振動抑制効果があることが実験的にわかっている (原ら, 2004). この補強工に地盤振動低減効果があるのかの判別をわかりやすくするために構造と移動振源を次のように単純化した.

5.3.1 計算モデルと移動振源

地盤と高架橋は Fig. 5.11 を参照されたい. 連結部は幅 1m の空間を設け, その中に幅 1m の細いコンクリート上を振源が移動することを想定する. Fig. 5.12 は 3 次元でのシミュレーションモデルの概観である. 線路長は 60m, 高架橋は連続な鉄筋コンクリートのブロックで, 橋脚は存在しない. これは, 列車の平均重量のみの移動振源ならば, 連続構造の上を走行している限り, 地盤振動は発生しないことを利用するためである. これにより, 連結部からの振動を明確に識別することができる. Table. 5.2 はモデルパラメータである. コンクリートや鉄鋼の物性値は渡邊ら (1999, p107) を参照した.

移動振源は 20Hz のコサイン波とし, 列車同期の荷重とする. Fig. 5.13 を参照され

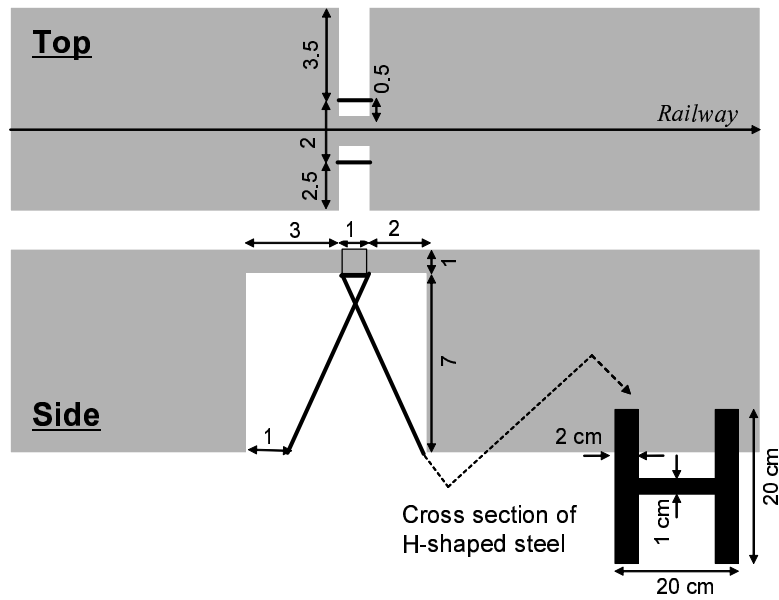


Fig. 5.11: A schematic illustration of the model of reinforced viaduct.

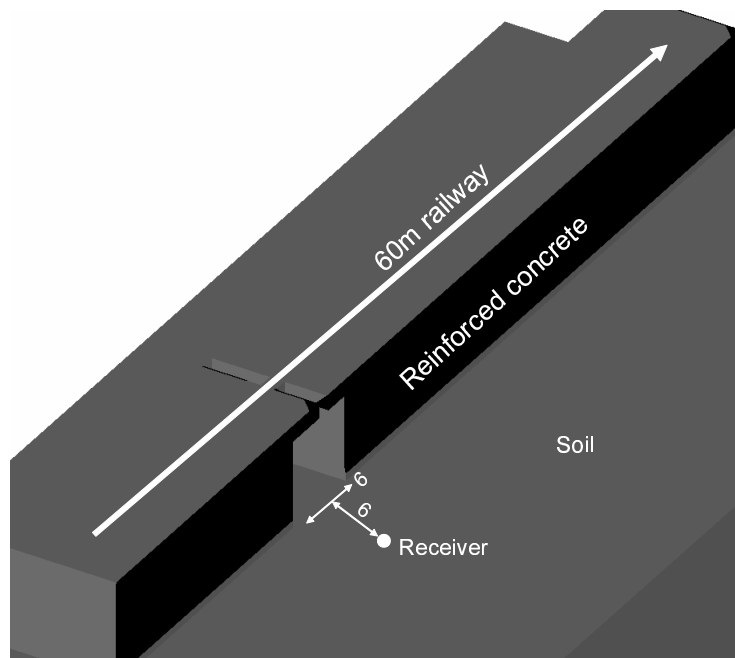


Fig. 5.12: The 3D image of the model in Fig. 5.11

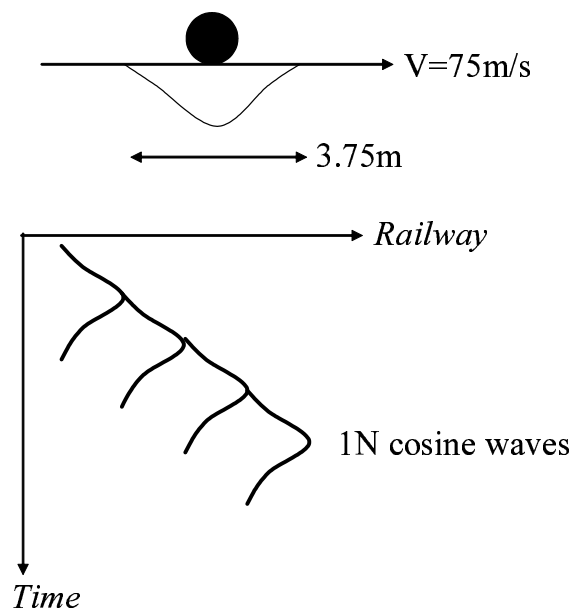


Fig. 5.13: Quasi-static moving source from the weight of train body.

Table 5.2: Parameters of viaduct, soil and steel beam.

Concrete	$V_p=1732\text{m/s}$, $V_s=1000\text{m/s}$, $\rho=1500\text{kg/m}^3$, $Q_p = Q_s = 20$
Soil	$V_p=1000\text{m/s}$, $V_s=200\text{m/s}$, $\rho=1500\text{kg/m}^3$, $Q_p = Q_s = 5$
H-steel	$E=21\text{GPa}$

たい。振幅 1N の片振幅のコサイン波を列車の到達時刻に同期させ地盤に荷重として加えている。列車速度は 75m/s とする。結果的に車軸位置に対して幅 3.75m に荷重が分布していることになる。これも、連結部からの振動を明確に識別するための設定である。ただし、高架橋上を走行する場合、列車の重量の平行移動 (SMS) が高架橋の橋脚を通じて、離散的に地盤に作用するので、前章が DMS が振源であったのに対し、この場合は、SMS が振源力の大部分となる (加藤, 2005)。

5.3.2 シミュレーション結果

Fig. 5.14 は X 字補強をした場合のスナップショットである (原ら, 2004)。X 字補強による振動の伝播はこの図を見る限り捕らえることは難しい。0.072 秒前後に発生している波は、計算の湧き出しによる波であり、これは実際の無限に長い線路を列車が走る場合には発生しない波である。次に、0.288 秒前後に発生する波がある。これが、高架橋連結部より発生する波である。

スナップショットによる波だけでは、X 字補強の振動低減効果を識別することは難しいので、具体的な波形を比較する。Fig. 5.15(a) ~ (c) は Fig. 5.12 の白丸に示した観測点での粒子速度の受振記録である。赤線が X 字補強前、緑線が X 字補強後、深度方向成分と線路と平行な水平成分は、地盤振動の低減がある。線路と直交する水平成分は地盤振動は低減しないが、絶対値が最も小さい成分である。

注意しなければならないことは、この振動記録は列車同期成分による振源のみの応答であるということである。高架橋連結部の補強には、荷重を分散させる効果 (地盤により安定的に力を受け流す効果) があると考えられる。つまり、移動振源の中の平均荷重 (列車同期成分) が不連続な構造物上を通過する際の波の発生を抑制する効果があると期待できる。そしてその期待通りの地盤振動低減効果を Fig. 5.15(a) は示している。

原ら (2004) の実験データによれば、この補強鋼の地盤振動に与える影響は、鉛直方向成分の振動振幅に 1 ~ 5dB の減衰があるとされている。Fig. 5.15(a) から読み取れる振幅の減衰量は、半分に届かない程度であり、この実験値の範囲内に収まる。

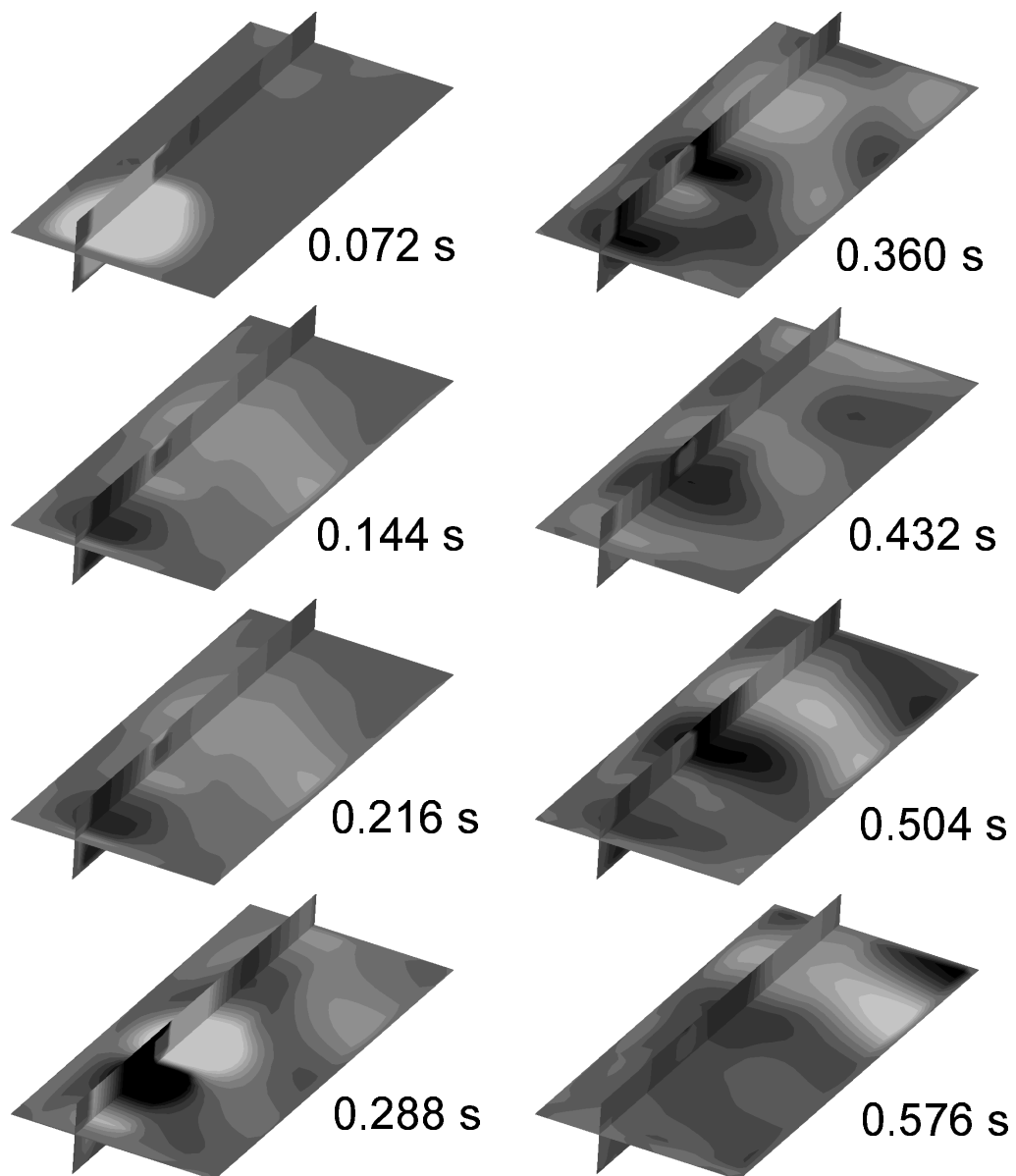
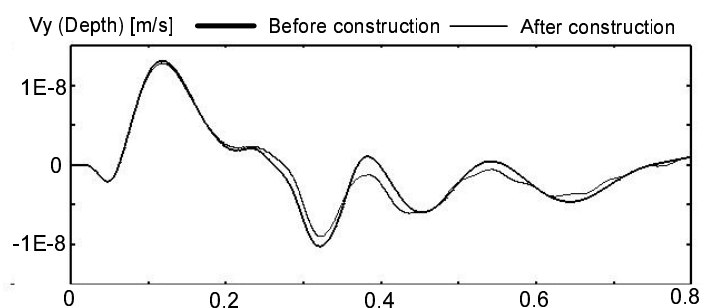
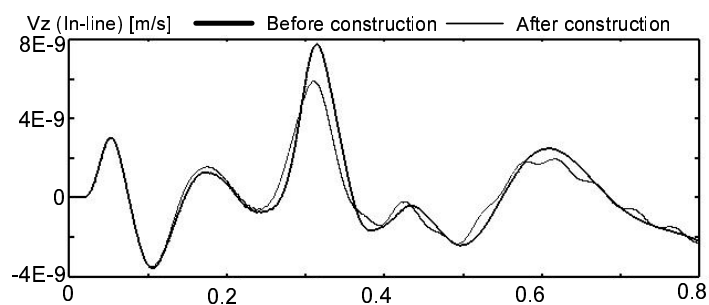


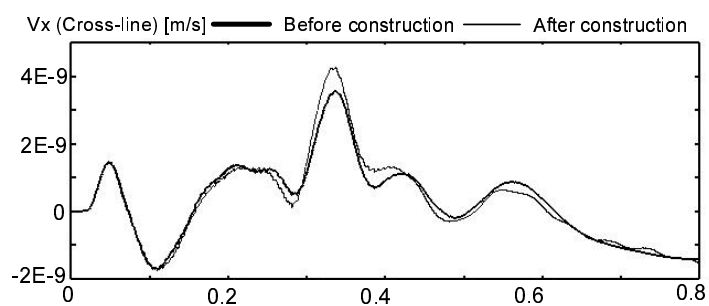
Fig. 5.14: Simulated wavefields from viaduct structure. The wave shown in 0072 sec is a numerical artifact. The wave shown in 0.288 sec is induced by the joint point of viaduct.



(a) Depth component



(b) In-line component



(c) Cross-line component

Fig. 5.15: A numerical prediction of the X-shaped measurement construction. Thin and thick lines show the waveforms of before- and after-construction respectively. (a) Depth component, (b) In-line component, (c) Cross-line component.

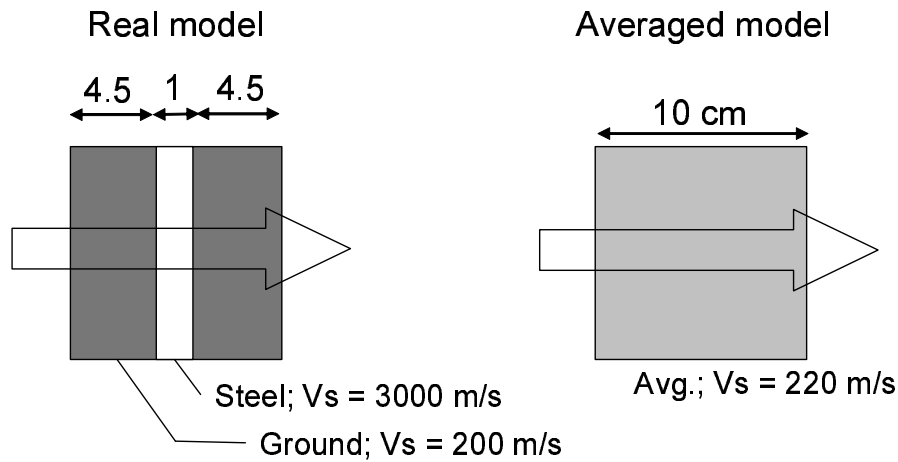


Fig. 5.16: A schematics for calculating the averaged velocity.

5.4 鋼矢板の振動減衰効果の評価

本節では, FEM が座標変換を利用できる特徴を活かし, 鋼矢板 (シートパイル) による振動減衰効果の評価を試みる. 鋼矢板を地盤に打設することで地盤振動の低減が確認されているが, 3 次元の理論的評価は成されていない (澤田・吉川, 2004). 神田 (2006) の行った発泡スチロールによる地中防振壁は, 施工幅が 50cm 程度なので, FDM でも良く評価できた. しかしながら, 鋼矢板は厚さが 1cm 程度と非常に薄く, しかも断面力の増加を狙い, コの字型に曲げられている. このような部材の評価をするべく次のような計算モデルを考案した.

5.4.1 計算モデルと移動振源

速度平均化 (時間平均公式)

後で説明するように, FEM において 1m のメッシュ間隔 (節点間隔は, 0.5m) とする. さらに, 座標変換を利用して, 0.1m まで, メッシュ間隔を狭めてゆく. しかし, 鋼矢板の幅は, 1cm 程度である. 安定条件の式 (3.139) を考えると, メッシュ間隔を 1cm まで狭めるのは, 非常に計算効率が悪い. そこで, Fig. 5.16 に示すように, 時間平均公式

$$\frac{10}{V_{Avg.}} = \frac{1}{V_{Steel}} + \frac{9}{V_{Ground}} \quad (5.2)$$

を利用して線路直交方向に伝播するの波の平均速度を算出する. 厳密には, 線路と並行する方向は鋼の速度となり, 異方性を定義する必要がある. しかし, 本プログラム

は、異方性は考慮できない。ゆえに波はおおむね線路直交方向に伝播するので、線路直交方向の値で等方な媒質であるとする。

平板型

上記の様に平均化によって作成されたメッシュを改良部 (Improved part) と呼ぶことにする。そして、Fig. 5.17 のようなモデルを作成した。改良部は長さ 40m, 幅 10cm, 深さ 6m である。そこから 26.2m に 60m の長さの線路があり、線路から 31.5m, 40m の改良部の中心線に 1 つの受振点を設ける。

湾曲型

ここでは、Fig. 5.19 に示すように幅 10cm の改良部を余弦波によって湾曲させて打設されている場合も考える。これは、鋼矢板がコの字型の鋼板を連結して作られているものを反映させるねらいがある。実際のスケールは、余弦波の周期が 1m 程度、幅が 50cm 程度だが、計算機能力の限界から、周期は 10m, 振幅は 0.2m とした。当計算場合、スーパーコンピュータ HPC2500 の 128CPU で、約 3 日間を要する。

擬似動的移動振源

前章にて、動的移動振源 (DMS) が地盤振動の原因であることを定量的に示した。この際の結論と、多くの現場記録 (吉岡, 1999) から地盤振動の主要周波数が、10Hz 前後であるという事実をもとに、以下のようにして、擬似的移動振源を作成した。

Fig. 5.19(a) のように、正弦波をトレースごとに振り分ける。式で表すと

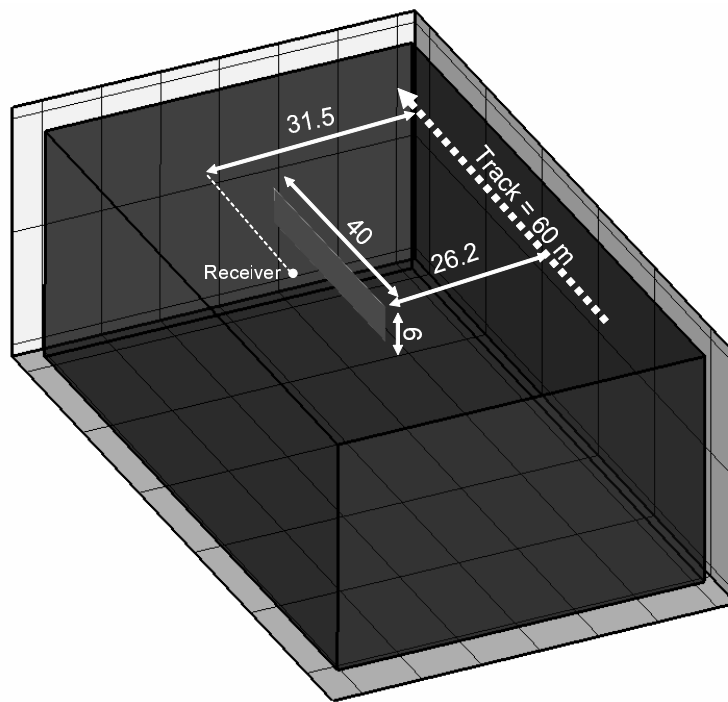
$$f(x, t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \theta_0), \quad \left(\frac{x}{V} \leq t \leq \frac{x}{V} + \frac{dx}{V} \right) \quad (5.3)$$

によって支配されている。今回は、振幅 $A_0 = 1.0 \times 10^5$ N, グリッド間隔 $dx=0.5$ m, 周期 $f_0=10$ Hz, 列車速度 $V=75$ m/s とした。

次に数値的な安定、即ち、式 (3.139) と第 4.3 節で議論した移動振源に対する安定条件から、第 4 章の場合、グリッド間隔は、0.25m で 40Hz まで安定と判断されていたことから、今回は各トレースごとに 20Hz のローパスフィルタを掛ける。そして、0.5m ごとに配置された各グリッド上の入力波形、Fig. 5.19(b) を得る。

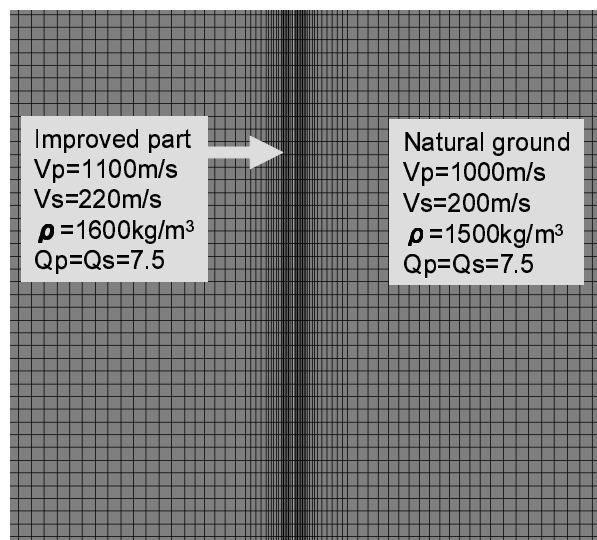
5.4.2 計算結果

Fig. 5.20 は、湾曲型の改良部をもつモデルでのスナップショットである。同心円状の波動場が、列車の進行と共に移動してゆく様子がわかる。メッシュ幅が狭い部分に



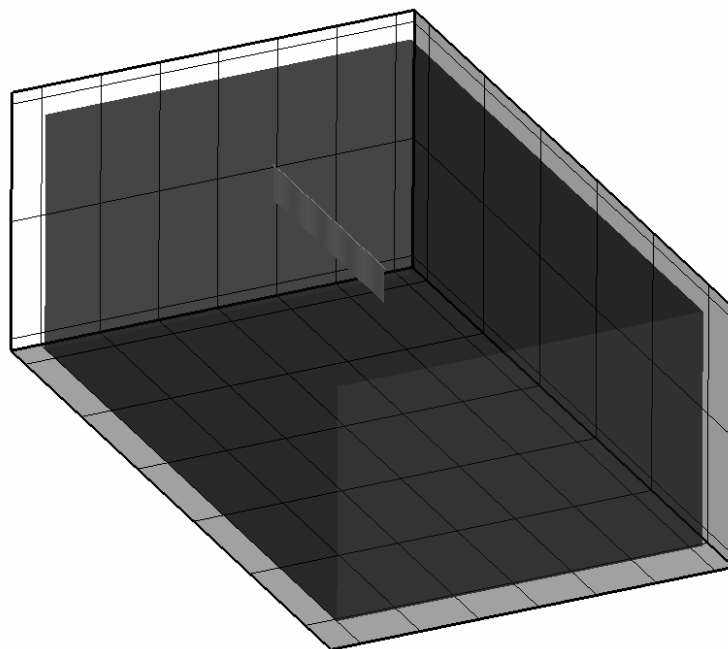
(a) 3D image

1 m mesh $\cdots \rightarrow$ 0.1 m mesh $\cdots \rightarrow$ 1 m mesh

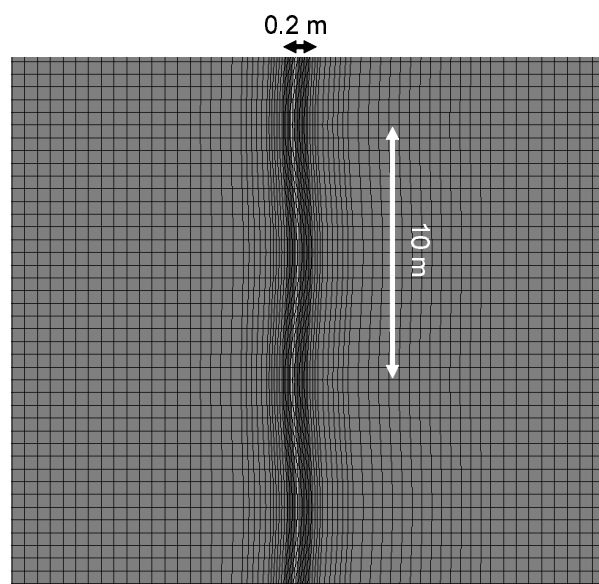


(b) Surface image

Fig. 5.17: Sheet pile model; Flat case. (a) 3D image, (b) Surface image

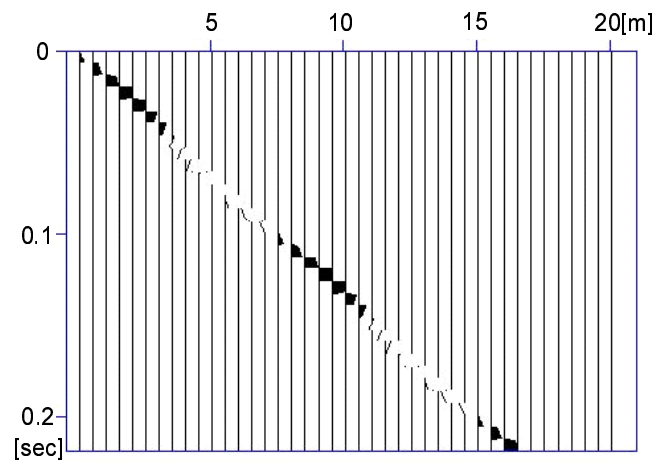


(a) 3D image

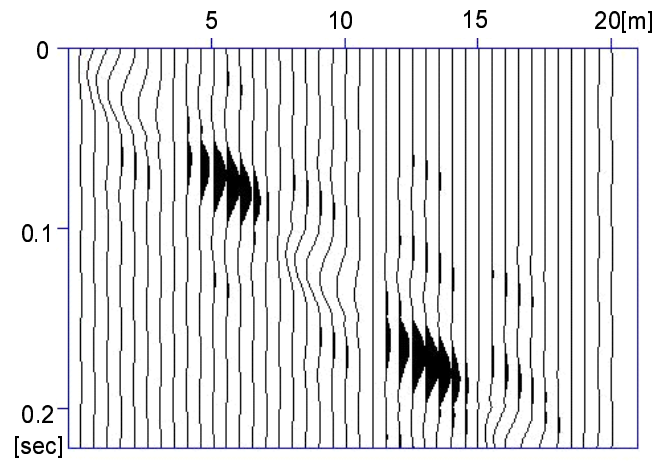


(b) Surface image

Fig. 5.18: Sheet pile model; Wavy case. (a) 3D image, (b) Surface image



(a) Before low-pass filter



(b) After low-pass filter

Fig. 5.19: Time series of synthetic transient force. (a) Before 20Hz low-pass filter, (b) After 20Hz low-pass filter

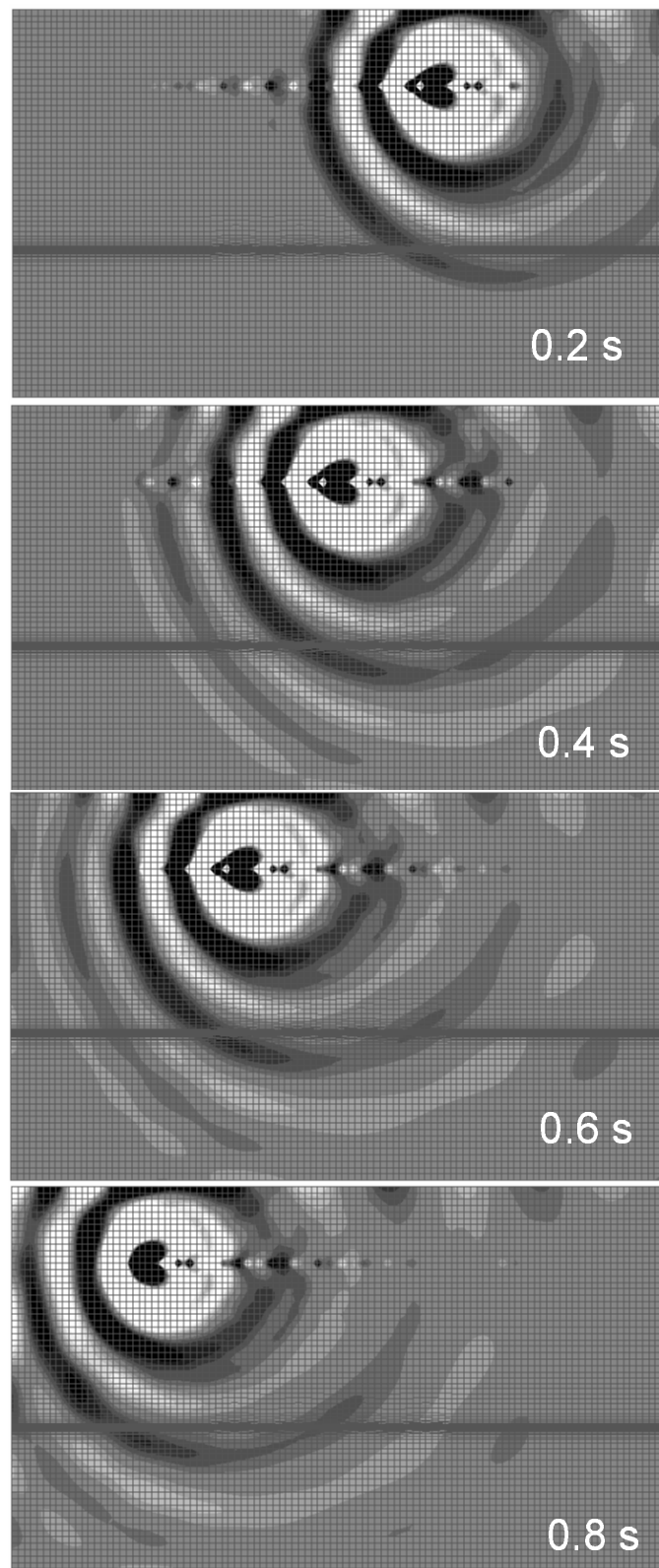


Fig. 5.20: Simulated wavefield for sheet pile model.

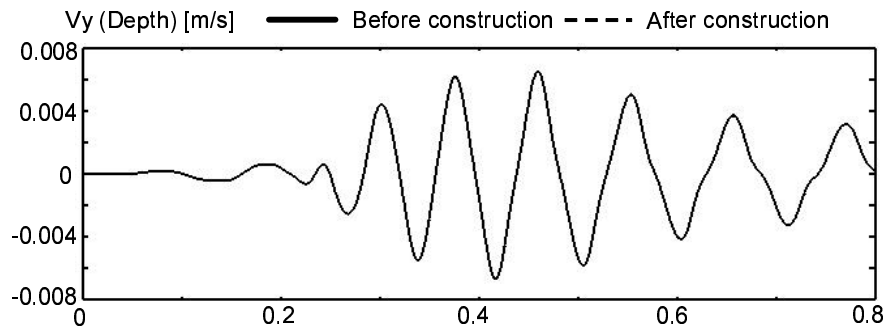


Fig. 5.21: Waveforms in case of flat sheet pile construction. Solid and dotted lines show the waveforms for before- and after-construction, respectively. Visually, both graphs agree completely.

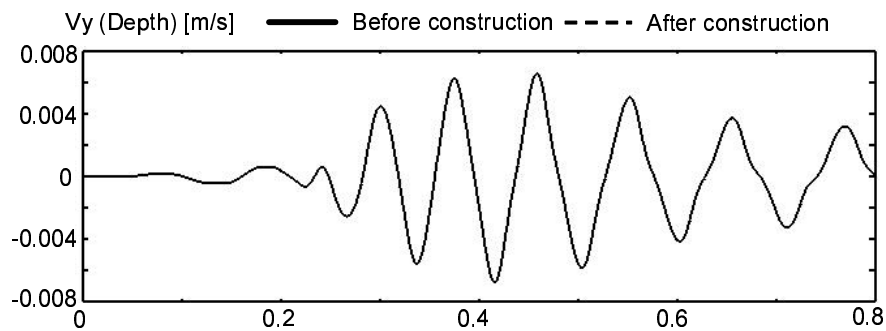


Fig. 5.22: Waveforms in case of flat sheet pile construction. Solid and dotted lines show the waveforms for before- and after-construction, respectively.

改良部が存在するが、このグラフィクスを見る限り波動場は改良部を通り抜け、全く変化が無いように見える。

Fig. 5.18(a) における受振点での深度方向の速度記録を示す。Fig. 5.21, 5.22 はそれぞれ、平板型と湾曲型での波形振幅である。実線で改良部なし、点線で改良部ありの記録を示しているが、両方の記録はスナップショットと同様、ほとんど同じに見える。当然、Fig. 5.18(a) と Fig. 5.21 も全く同じに見える。

スナップショットや波形記録を見る限り、鋼矢板による効果はほとんど識別できない。そこで、速度記録 $v(t)$ を時間微分 $a(t)$ とし加速度記録を算出する。この加速度の最大値 $\max \{a(t)\}$ を読み取りレベル値

$$[\text{dB}] = 20 \log_{10} \frac{\max \{a(t)\}}{10^{-5}} \quad (5.4)$$

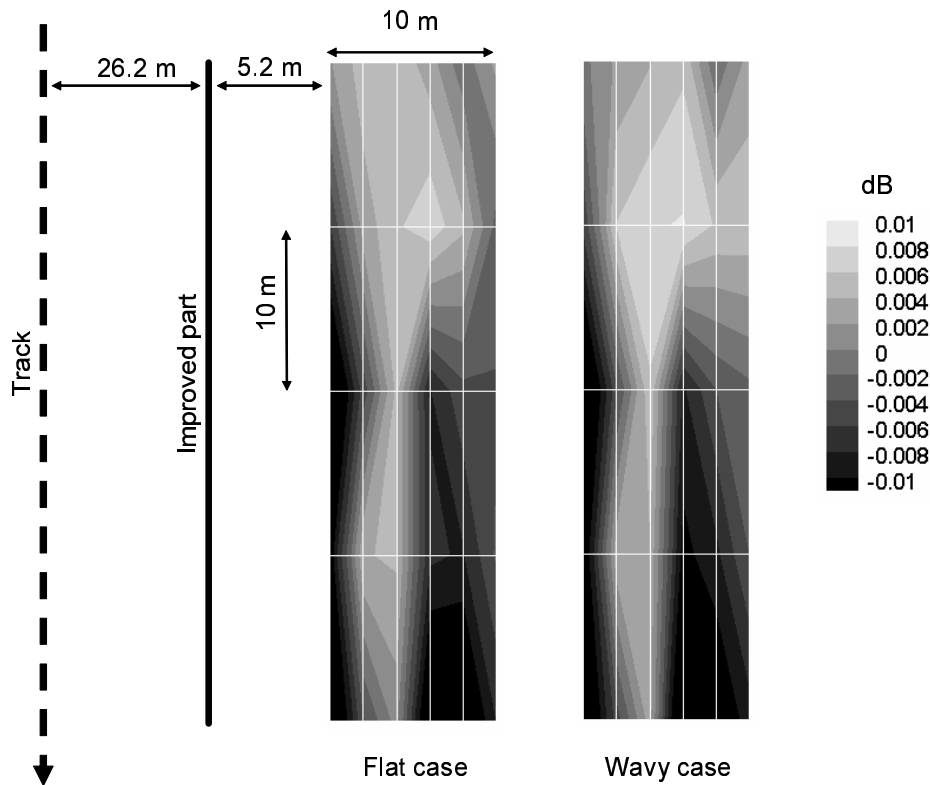


Fig. 5.23: Decibel maps for describing the effect of sheet pile construction. The lattice points with minus value mean the place where the sheet pile construction supplies the reduction of ground vibration level. Left and right panels show the case of flat and wavy construction, respectively.

に換算した。

Fig. 5.23 は低減効果をデシベル表示したものである。改良部からの距離が、5.2mより30点の格子点から成る。左側が平板型の場合、右側が湾曲型の場合を示す。黒色側が地盤振動が低減した場所、白色側が増加した場所を意味している。波形記録がほとんど変化しなかったことからわかるように、最も低減している改良部側中央で-0.015dB程度である。

改良部がある場合、振幅が増加した部分も存在する。全30の格子点中約6割の18点が低減を示している。地盤の条件等は違うが、澤田・吉川(2004)の実験の考察の約7割という値に近い。改良部が、波動を反射させる効果が狙いえるが、改良部が薄いため、波動は一見改良部をすり抜けているように見える。しかし、確実に反射する成分があるので、全体的には低減する点が多い。振幅が増加する部分が存在するのは、改良部により表面波の共振点がずれるからであると考えられる(斎藤, 1993)。

5.5 まとめ

本章にて、記述した3次元FEMおよびDEFGMにより、以下のような成果があった。

- 弾性体での解析解および粘弾性体での準解析解を用いた3つのモデルで精度を評価した。結果、解析解との整合性は大変良かった。ゆえに、準解析解におけるわずかな違いは、誤差ではなく、FEMと準解析解の間の物理的定義の違いによると考えられる。ゆえに、FEMの精度は誤差が全くないほどに良いと結論づけられる。
- 並列計算による高速化が顕著である。さまざまなプロセッサ台数において、台数倍以上の高速化を示した。これは、分散メモリ型の並列計算を行っていることに起因すると考えられる。例えば、分散メモリ型の並列計算は、メモリ使用量がコンパクトになるため、CPUがメモリ内のデータを探す時間も低減しているということである。
- 高架橋連結部の補強鋼が、地盤振動の与える影響を評価を行った。また、鋼矢板による地盤振動の減衰効果の評価を行った。これらは、FEMおよびDEFGMが梁理論との結合や、座標変換を用いることで、複雑な構造問題を解くのに適していることを示した。

これらの応用問題のシミュレーションは、過去の実験的成果を肯定する結果を得たといえる。しかしながら、弾性/粘弾性体という枠組みの中だけで説明していることになり、考慮していないメカニズムの影響を今後検討してゆく必要がある。例えば、改良部と地盤との間のすべり等があるといえる。

第6章 結言

本論文を通じて, FDM と FEM は適切に評価され, 列車走行に起因する地盤振動に関する研究に適用し, 数値計算を用いた研究基礎を築いた. 本論文 3 章から 5 章での成果を以下にまとめる.

- 第 3 章では, FDM4(Finite Difference Method with 4th order accuracy in space) と DEFGM(Decomposed Element Free Galerkin Method) を中心に議論した. DEFGM を利用し, 最大節点数 4001×2001 の計算領域で, 計算精度の比較検討を行うことができた. DEFGM は FDM4 の 2.9 倍の計算時間を必要としたが, 必要メモリは, ほとんど同じである. また, DEFGM は FDM の場合と同様に, PML を適用することができる. 計算時間と計算精度の両面から評価した結果, 自由表面を含まないモデルでは FDM4 が, 逆に, 自由表面を含むモデルでは DEFGM が効果的なシミュレーション手法であるということがわかった. DEFGM において, 基底ベクトルと重み関数を変化させながら比較検討を行った. 過去の研究に示された基底ベクトルと重み関数の組み合わせは, 期待されるほどの精度を得られなかった. しかし, 著者の提案するこれらの組み合わせは EFGM の精度を劇的に向上させた. さらに, 通常の FEM を上回る精度を与える組み合わせを発見した.
- 第 4 章では, 列車走行に起因する地盤振動を FDM によって再構成した. 振源力を計測によって入手しているため, 伝達系の波動論の妥当性に絞った議論ができた. 6 通りの粘性 Q 値でそれぞれ, シミュレーションを行ったところ, $Q = 7.5$ の設定においてシミュレーションは現場記録と良い一致を示した. また, 現場記録にドブラー効果が観測されることが明らかになった. あらゆる車軸からの応答は同じであり, DMS(Dynamic Moving Source) のみが地面振動を引き起こす, という 2 つの仮定を設けている. これらは計測上の問題や, 理論の簡単化のために設けたが, シミュレーション結果は地面振動現象を十分説明しているといえる.
- 第 5 章では, まず 3 次元 FEM の精度と並列計算による高速化を検討した. 計算精度は極めて良く, 並列計算による高速化が顕著である. さまざまなプロセッサ台数において, 台数倍以上の高速化を達成した. そして 3 次元 FEM あるいは DEFGM を用いて, 高架橋連結部に取り付けた補強鋼や鋼矢板が地盤振動に与える影響の評価を行った. これらの結果は, 過去に行われた実験的研究の考察を肯定するものであった.

本論文全体を通して強調すべき点は, FDM, FEM, DEFGM の精度や特徴を十分に確認した上で, 地盤振動現象を説明したことである. 本論文において, 2 次元 PS 反射

波, レイリー波に対する解析界との比較, 3次元レイリー波の解析解, 成層構造における準解析解との比較, 移動振源に対する安定条件, DEFGM と梁理論の結合理論の妥当性の検討があったことを忘れてはならない. 当分野に限らず, さまざまな研究分野において数値計算が非常に有効なツールであることは確かである. しかしながら, 工学的な応用を考えた時に, 数値計算が信用できる値を提供しているかどうかには, 本論文で示したような十分な議論が必要であることを強調したい.

FDM と FEM は均質な問題を解く限り, 精度は互角である. 従って, これらは用途によって使い分けるのが良い. FDM は, 現象の基本的メカニズムの解明する際に適切である. なぜなら, プログラミングが簡潔で計算量が少ないからだ. 逆に, 複雑な構造問題の扱いが容易な FEM は, 高架橋や防振工事といった人工構造物を評価する際に適切である.

第5章に示したいいくつかの応用例も, 考慮が望まれるメカニズムを無視している. 例えば, 地盤の圧縮性やコンクリートと地盤の間のすべりである. これらのメカニズムは冒頭で述べたように, FDM, FEM の枠組み縛られない新規手法の導入が効果的である. このような新手法の導入の際に, 本研究で示した精度評価が活用できると考えられる.

付 録 A コンボリューションの性質

関数 $a(t)$ と関数 $b(t)$ をコンボリューションした関数を $c(t)$ と置くと

$$c(t) = a(t) * b(t) \quad (\text{A.1})$$

である. これはたたみ込み積分

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau) b(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

と定義されるものである. これはフーリエ変換することによって次式のような掛け算の形で表すことができる.

$$F[c(t)] = F[a(t)] F[b(t)] \quad (\text{A.3})$$

ここで, フーリエ変換の

$$F\left[\dot{f}(t)\right] = i\omega F[f(t)] \quad (\text{A.4})$$

という特徴から, 以下の2式で表せるような定理を導くことができる.

$$\dot{a}(t) * b(t) = a(t) * \dot{b}(t) \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{c}(t) = \dot{a}(t) * b(t) = a(t) * \dot{b}(t) \quad (\text{A.6})$$

また, 以下の2式のような交換法則や分配法則も成立する.

$$a(t) * b(t) = b(t) * a(t) \quad (\text{A.7})$$

$$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \quad (\text{A.8})$$

本文においては次式のようなディリクレのデルタ関数を含んだコンボリューションの変形が行われている.

$$\begin{aligned} x(t) * (y(t)\delta(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t-0}^{t+0} x(\tau) y(t - \tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) y(0) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

付 録 B 梁理論と DEFGM の結合理論

本付録では, 梁要素について説明し, 梁理論と DEFGM の比較検討する. またこれから 2通りの計算方法を結合した計算方法について述べる.

B.1 梁理論の計算方法

Fig. B.1 に示したように, 梁理論の計算は, 梁要素と, 梁要素の両端を節点とする有限要素法によって計算する. 節点 i, j における変位が X_i, Y_i, X_j, Y_j で, 回転変位が θ_i, θ_j による梁部材の内力は, 節点でこの要素が外力あるいは別の要素から受ける力およびモーメントと釣り合う. つまり

$$f = T^T K^* T U \quad (B.1)$$

である. ここで,

$$K^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{EI}{L} \\ & sym. & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & & & & \\ -\sin \theta & \cos \theta & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos \theta & \sin \theta & \\ & & & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

$$U = \begin{bmatrix} X_i & Y_i & \theta_i & X_j & Y_j & \theta_j \end{bmatrix}^T \quad (B.4)$$

$$f = \begin{bmatrix} F_i^x & F_i^y & \varpi_i & F_j^x & F_j^y & \varpi_j \end{bmatrix}^T \quad (B.5)$$

である (松本ら, 2000, pp261) E はヤング率, I は断面 2 次モーメント, A は断面積である. 式 (B.1) に加速度項を加えて,

$$M \ddot{U} + T^T K^* T U = f \quad (B.6)$$

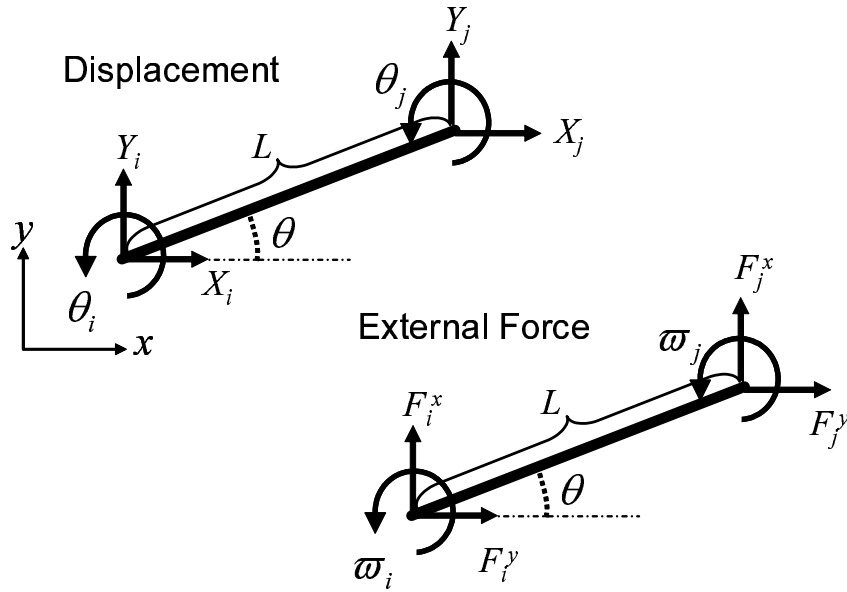


Fig. B.1: Beam element.

がこの梁要素の運動方程式である. 質量マトリクスも FEM と同様に集中化した質量マトリクス

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\rho L}{2} & \frac{\rho L}{2} & 0 & \frac{\rho L}{2} & \frac{\rho L}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

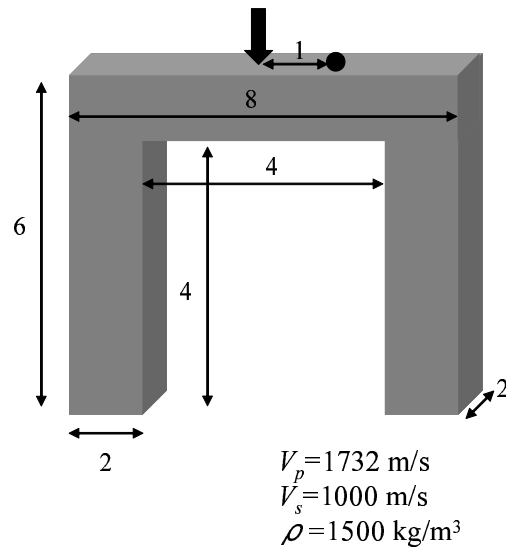
を用いる. これにより, 行列式 (B.6) を並べ替えると,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \varpi \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

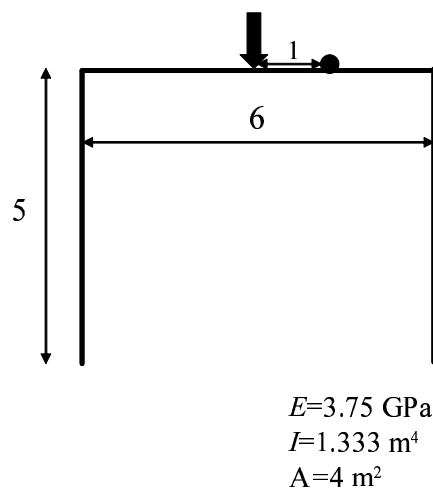
という形に変形される. これより,

$$\begin{aligned} M_{11} \ddot{U} + (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) U &= F - K_{12} K_{22}^{-1} \varpi \\ \theta &= K_{22}^{-1} (\varpi - K_{21} U) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となり, 加速度項の時間差分を取れば, 完全陽的に変位を求めることができる (片山ら, 1979, pp115).



(a) 3D elastic body



(b) Beam structure

Fig. B.2: 3D elastic body and beam structure. The unit of length is [m].

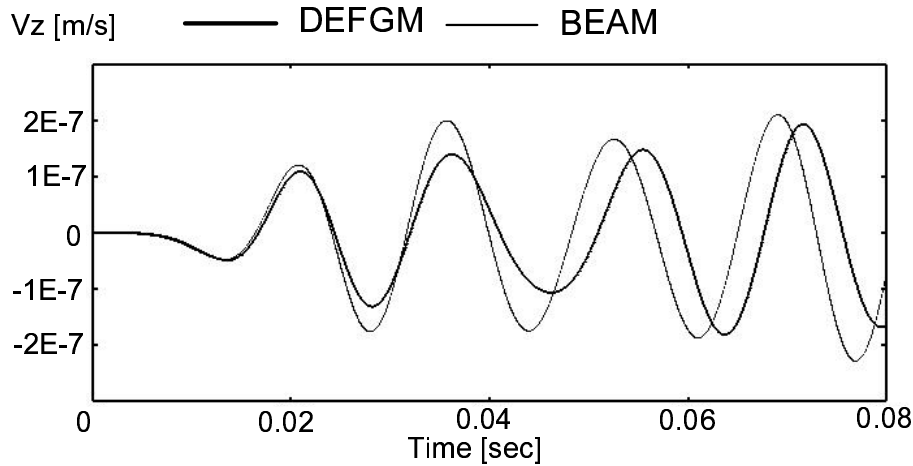


Fig. B.3: Waveform comparison between elastic body and beam structure models in Fig. B.2(a) and (b).

B.2 3次元弾性体と梁理論の比較

本節では前節で説明した梁理論を用いた振動計算手法と EFG による計算の比較を行う。Fig. B.2(a), (b) のような橋梁のモデル化を考える。矢印で示したような、橋梁の天板の中央に下向きの力を加える。このときの振動記録を黒丸で示す点で観測する。入力波形は 50Hz ピークのリッカーウェーブレットで、振幅の最大値は 1N である。

Fig. B.3 は上下方向の振動記録の比較である。太線が DEFGM で計算されたもの、細線が梁理論で計算されたもの。初動 (0.2 秒まで) は良く似ているが、その後、梁理論による計算結果のほうが、周期がやや短い。これは、梁理論モデル (Fig. B.2(b)) の方は、断面積は梁の長さに対して十分に長いという近似を行うので、連続体モデル (Fig. B.2(a)) よりも構造が小さくなるために、構造による共振周波数が高くなるためである。当然、この残差は断面積に比べて梁の長さが長くなるほど小さくなる。結論としては、どちらのモデルも良く似た結果を導くことができ、これら 2 通りのモデル化はおおむね同じ橋梁を計算していると考えてよい。

B.3 DEFGM と梁理論の適合条件

梁理論と DEFGM は結合して計算することができる。Fig. B.4 は、DEFGM と梁理論計算の結合部の模式図である。黒丸は節点、A は梁の断面積、B は DEFGM の 1 つの節点の受け持つ面積である。ここで、Fig. B.4 の中央に梁部材と連続体の両方から共有される 1 つの節点がある。この点において、DEFGM と梁理論の計算を結合する。両計算とも節点には変位あるいは粒子速度が配置されている。例えば、粒子速度を扱

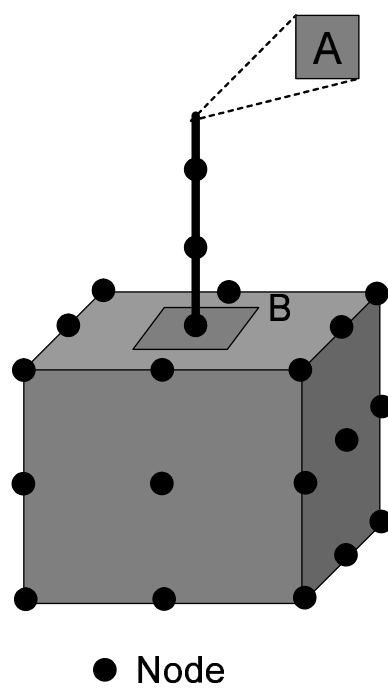


Fig. B.4: Connecting part between DEFGM and beam structure. Black circle means nodal points, A means cross-section area of beam element, and B means the area assigned for one nodal point on element surface.

う場合, DEFGM によって計算された連続体部の一部としての節点上の粒子速度を (v_x^B, v_y^B, v_z^B) とし, 梁理論によって計算された梁部材の一部としての節点上の粒子速度を (v_x^A, v_y^A, v_z^A) としたとき, 節点の共有によって,

$$\begin{aligned} v_x^A A &= v_x^B B \\ v_y^A A &= v_y^B B \\ v_z^A A &= v_z^B B \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

という適合条件が必要になる. そこで, それぞれの計算のタイムステップごとに, 梁部材の粒子速度を

$$v_x^A = 0.5 \left(v_x^A + \frac{B}{A} v_x^B \right) \quad (\text{B.11})$$

$$v_y^A = 0.5 \left(v_y^A + \frac{B}{A} v_y^B \right) \quad (\text{B.12})$$

$$v_z^A = 0.5 \left(v_z^A + \frac{B}{A} v_z^B \right) \quad (\text{B.13})$$

なる加算を行い, この加算された値を連続体部に

$$v_x^B = \frac{A}{B} v_x^A \quad (\text{B.14})$$

$$v_y^B = \frac{A}{B} v_y^A \quad (\text{B.15})$$

$$v_z^B = \frac{A}{B} v_z^A \quad (\text{B.16})$$

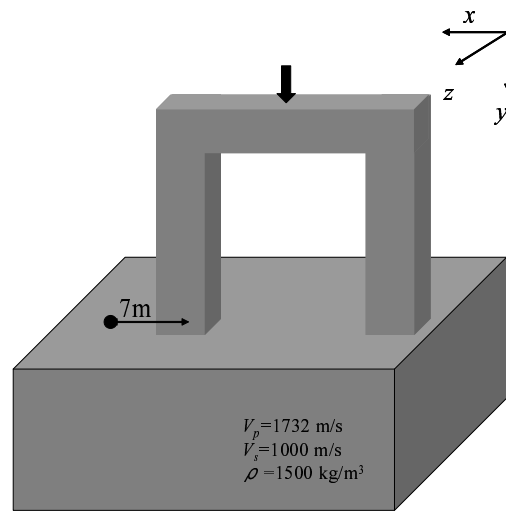
と戻すことによって適合条件 (B.10) は満たされる.

B.4 DEFGM と混合計算の比較

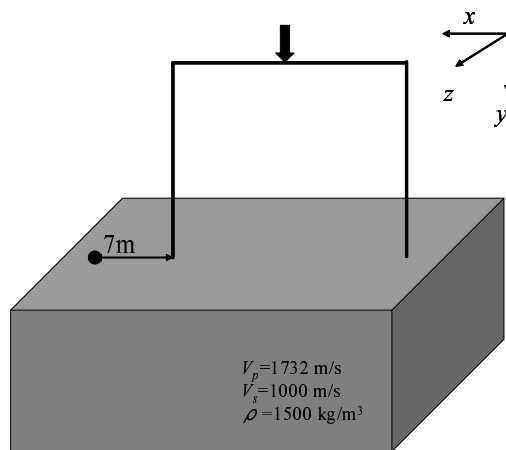
前々章と同様に梁理論による計算方法で橋梁部を計算し, 地盤を DEFGM で計算する混合計算と全て DEFGM で計算する計算方法との比較を行う. Fig. B.5(a) は全て DEFGM で計算する場合の弾性体モデルである. Fig. B.5(b) は橋梁部は梁理論で計算し, 前章の適合条件を利用して地盤部は DEFGM で計算させる.

Fig. B.6(a) は上下方向の振動記録の比較である. 太線が DEFGM で計算されたもの, 細線が混合計算でのもの. Fig. B.6(b) は 2 次元橋梁と同一平面状の水平方向の振動記録である. 前々章と同じく, どちらの計算モデルも良く似た結果を導くことができる. すなわち, 前章の適合条件が適切であることを示している.

なお, スタッガードグリッドを利用する差分法では, 粒子速度は成分によって配置が異なるため (Fig. 3.1 参照), 厳密に節点を共有させることができないため計算精度が悪くなる. 仮に, コロケートグリッドを使用すると節点は厳密に共有させることが



(a) Elastic body model

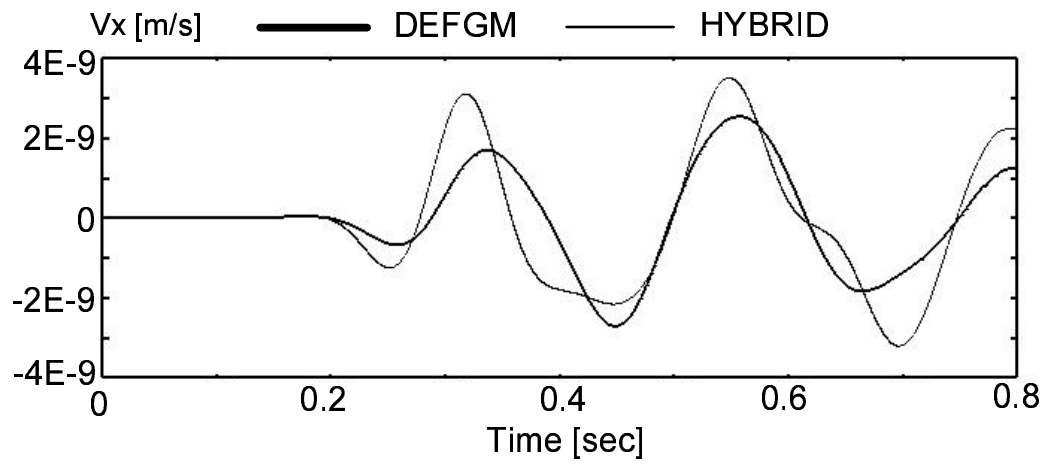


(b) Hybrid model

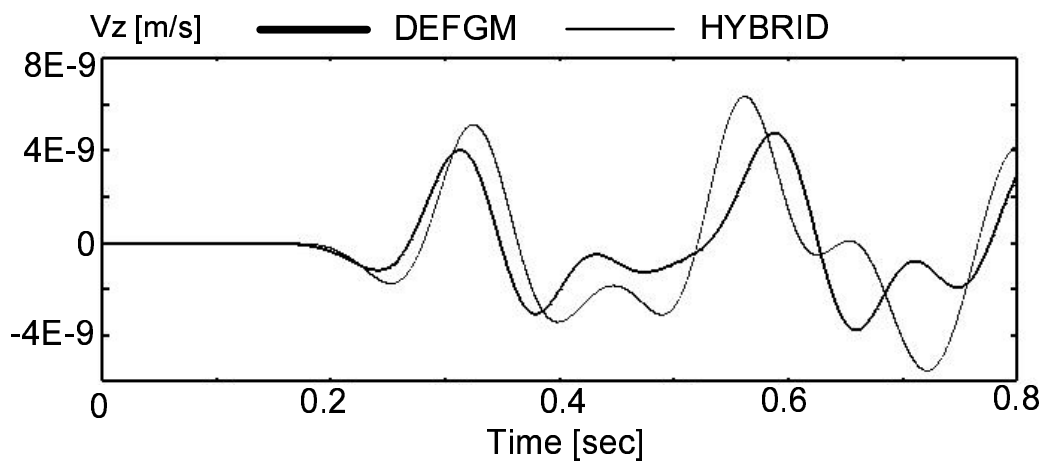
Fig. B.5: A test model for comparing elastic body model and hybrid model.

できるが, もともとスタaggerドグリッドよりも計算精度は良くない. ゆえに, 有限要素法の骨格を持つ *DEFGM* は, この梁理論をはじめとするさまざまな別の計算アルゴリズムとハイブリッドして計算させることに向いている.

しかしながら, 計算時間の大半を地盤部に費やすため, 計算時間を短くするためには高架橋全体を梁理論で計算しなければならない. あくまで梁理論とは連続体の近似計算であり, 連続体計算という精度の良さを相殺することになる. 従って, 本章にて導出した混合計算手法は, 特殊な部材を用いた振動抑制などを評価する際に有効である.



(a) x component



(b) z component

Fig. B.6: Waveform comparison between elastic body and hybrid models in Fig. B.5(a) and (b).

参考文献

- 安芸敬一, リチャーズ, P. G. (2004) : 地震学 定量的アプローチ, 上西 幸司, 亀 伸樹, 青地 秀雄訳, 古今書院.
- Beissel, S and Belytschko, T. (1996) : Nodal integration of the element-free Galerkin method, *Comput. Methods Appli. Mech. Engng.*, **139**, 49–74.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu. L. (1994) : Element-free Galerkin method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37**, 229–256.
- Blanch, J. O., Robertsson, J. O. A., and Symes, W. W. (1995) : Modeling of a constant Q: Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique, *Geophysics*, **60**, 176–184.
- Bohlen, T. and Saenger, E. H. (2006) : Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh waves, *Geophysics*, **71**, T109–T115.
- Brighenti, R. (2005) : Application of the element-free Galerkin meshless method to 3D fracture mechanics problems, *Engng. Fracture Mech.*, **72**, 2808–2820.
- Christensen, J. M. (1982) : Theory of viscoelasticity -An introduction, Academic Press, Inc.
- Carcione, J. M., Kosloff, D., and Kosloff, R. (1988) : Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium, *Geophys. J. Int.*, **95**, 597–611.
- Carcione, J. M. (1994) : The wave equation in generalized coordinates, *Geophysics*, **59**, 1911–1919.
- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., and Reshef, M. (1985) : A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, *Geophysics*, **50**, 705–708.
- Collino, F. and Tsogka, C. (2001) : Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, *Geophysics*, **66**, 294–307.
- Degrande, G. and Lombaert, G. (2001) : An efficient formulation of Krylov's prediction model for train induced vibrations based on the dynamic reciprocity theorem, *J. Acoust. Soc. Am.*, **110**(3), 1379–1390.
- Dumbser, M., Käser, H. (2006) : An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. The three-dimensional isotropic case, *Geophys. J. Int.*, **167**, 319–336.

- Festa, G. and Nielsen, S. (2003) : PML Absorbing Boundaries, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **93**, 891–903.
- Foti, S. (2003) : Using transfer function for estimating dissipative properties of soils from surface-wave data, *Near Surface Geophysics*, **93**, 231–240.
- Fujiwara, H. (1998) : The fast multipole method for integral equations of seismic scattering problems, *Geophys. J. Int.*, **133**, 773–782.
- Fujiwara, H. (2000) : The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems, *Geophys. J. Int.*, **140**, 198–210.
- Furumura, T. and Koketsu, K. (1998) : Specific distribution of ground motion during the 1995 Kobe earthquake and its generation mechanism, *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 785–788.
- Graves, R. W. (1996) : Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **2**, 1091–1106.
- Hayashi, K. (1999) : Variable Grid Finite-difference Modeling Including Surface Topography, Department of Earth, Atmospheric, and Planetary Sciences in the partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences at the Massachusetts Institute of Technology.
- 原恒雄, 吉岡修, 神田仁, 舟橋秀麿, 根岸裕, 藤野陽三, 吉田一博 (2004) : 新幹線走行に伴う沿線地盤振動低減のための高架橋補強工の開発, 土木学会論文集, **No.776/I-68**, 325–338.
- 久田俊明, 野口裕久 (2002) : 非線形有限要素法基礎と応用, 丸善株式会社.
- Hall, L. (2003) : Simulations and analyses of train-induced ground vibrations in finite element models, *Soil Dynamics and Earthquake Engng.*, **23**, 403–413.
- Jia, X. and Hu, T. (2006) : Element-free precise integration method and its applications in seismic modeling and imaging, *Geophys. J. Int.*, **166**, 349–372.
- Käser, H., Dumbser, M. (2006) : An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. The two-dimensional isotropic case with external source terms, *Geophys. J. Int.*, **166**, 855–877.
- Käser, H., Dumbser, M., de la Puente, J., Igel, H. (2007) : An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - III. Viscoelastic attenuation, *Geophys. J. Int.*, **168**, 224–242.

- Koketsu, K., Fujiwara, H. and Ikegami, Y. (2004) : Finite-element simulation of seismic ground motion with a voxel mesh, *Pure Appl. Geophys.*, **161**, 2183–2198.
- 片山恒雄, 宮田利雄, 国井隆弘 (1979) : 新体系土木工学第 10 巻, 構造物の振動解析, 土木学会.
- 加藤政史 (2005) : 列車走行による地盤振動の解析に関する研究, 京都大学大学院工学研究科修士論文.
- Katou, M., Kanda, H., Sanada, Y., Matsuoka, T., Osamu, Y., Ishii, H., Miyoshi, T. and Ashida, Y. (2006a) : Simulation of the ground vibration induced by train, *Procs. 19th SAGEEP (Symposium on the Application of Geophysics to Engng. and Environmental Problems)*, 409–418.
- Katou, M., Mikada, H., Matsuoka, T., Sanada, Y. and Ashida, Y. (2006b) : Numerical simulation for 2D seismogram by using non marices EFG technique, *Procs. 8th SEGJ (Soc. of Exploration Geophysicists of Japan) Int. symposium.*, 40–45.
- Katou, M., Matsuoka, T., Mikada, H. and Ashida, Y. (2007a) : Simulation of elastic wave propagation by 3D FEM with moving least square interpolants and parallel computing, *Procs. ICCM (The Int. Conf. of Comput. Methods) Int. symposium.*, G7-4
- Katou, M., Matsuoka, T. and Mikada, H. (2007b) : FEM simulation of the visco-elastic wave propagation with frequency dependent Q and wave scattering problems, *Procs. APCOM'07 - EPMESC XI (3rd Asian-Pacific Congress on Comput. Mechanics in conjunction with 11th Int. Conf. on the Enhancement and Promotion of Comput. Methods in Engng. and Science) Int. symposium.*, MS29-2-2.
- 神田仁, 吉岡修, 石井啓稔, 加藤政史, 真田佳典, 松岡俊文, 三善孝之 (2005) : 移動荷重による波動場のシミュレーションにおける振源モデリングについての考察, 物理探査, **58**, 363–375.
- 神田仁 (2006) : 列車走行時の沿線地盤振動に関する数値シミュレーションの開発と防振対策への適用に関する研究 京都大学大学院工学研究科博士論文.
- Kennett, B. L. N. (1979) : Seismic waves in a stratified half space, *Geophys. J. Int.*, **57**, 557–583.
- Kennett, B. L. N. (1980) : Seismic waves in a stratified half space - II, *Geophys. J. Int.*, **61**, 1–10.

- Komatitsch, D. and Tromp, J. (1999) : Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation, *Geophys. J. Int.*, **139**, 806–822.
- Komatitsch, D. and Tromp, J. (2002) : Spectral-element simulations of global seismic wave propagation - I. Validation, *Geophys. J. Int.*, **149**, 390–412.
- Komatitsch, D. and Tromp, J. (2003) : A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation, *Geophys. J. Int.*, **154**, 146–153.
- Komatitsch, D., Liu, Q., Tromp, J., Süß, P., Stidham, C. and Shaw, J. H. (2004) : Simulation of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **94**, 187–206.
- Krylov, V. V. (1996) : Vibrational impact of high-speed trains. I. Effect of track, *J. Acoust. Soc. Am.*, **100**(5), 3121–3134.
- Levander, A. R. (1988) : Fourth-order finite-difference P-SV seismograms, *Geophysics*, **53**, 1425–1436.
- Leurer, K. C. (2004) : Compressional- and shear-wave velocities and attenuation in deep-sea sediment during laboratory compaction, *J. Acoust. Soc. Am.*, **116**(4), 2023–2030.
- Liu, H. P., Anderson, D. L., and Kanamori, H. (1976) : Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition, *Geophys. J. Int.*, **47**, 41–58.
- Liu, G. R. (2003) : Mesh free methods, CRC press.
- Lombaert, G., Degrande, G., Kogut, J. and Francois, S. (2006) : The experimental validation of a numerical model for the prediction of railway induced vibrations, *J. Sound Vib.*, **272**, 512–535.
- Lu, Y. Y., Belytschko, T. and Tabbara, M. (1995) : Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **126**, 131–153.
- Ma, S., Archuleta, R. J. and Liu, P. (2004) : Hybrid modeling of elastic P-SV wavemotion: A combined finite-element and staggered-grid finite-difference approach, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **94**, 1557–1563.

- Marfurt, K. J. (1988) : Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations, *Geophysics*, **49**, 533–549.
- 松本勝, 渡邊英一, 白土博通, 杉浦邦征, 五十嵐晃, 宇都宮智昭, 高橋良和 (2000) : 構造力学 II, 丸善株式会社.
- メンケ, W. (1997) : 離散インバース論-逆問題とデータ解析-, 柳谷 俊, 塚田 和彦訳, 古今書院.
- O'Brien, J. and Rizos, D. C. (2005) : A 3D BEM-FEM methodology for simulation of high speed train induced vibrations, *Soil Dynamics and Earthquake Engrg.*, **25**, 289–301.
- パチェコ, P. (2001) : MPI 並列プログラミング, 秋葉 博訳, 培風館.
- Robertsson, J. O. A., (1988) : A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography, *Geophysics*, **61**, 1921–1934.
- 斎藤正徳 (1993) : Lamb の問題に対する分岐線積分の寄与, 物理探査, **46**, 372–380.
- 澤田義博, 吉川斉児 (2004) : 橋脚より発生する地盤振動のシートパイルおよび溝による低減効果について, 物理探査学会第 111 回学術講演会論文集, 93–96.
- Sheng, X., Jones, C. J. C. and Petyt, M. (1999) : Ground Vibration generated by a load moving along a railway track, *J. Sound Vib.*, **228**, 129–156.
- Sheng, X., Jones, C. J. C. and Thompson, D. J. (1999) : A theoretical model for ground vibration from trains generated by vertical track irregularities, *J. Sound Vib.*, **272**, 937–965.
- Sheng, X., Jones, C. J. C. and Thompson, D. J. (2006) : Prediction of ground vibration from trains using the wavenumber finite and boundary element methods *J. Sound Vib.*, **293**, 575–586.
- 白石和也 (2007) : 特性曲線法弾性波動シミュレーションと地震波干渉法による地下構造探査に関する研究, 京都大学大学院工学研究科博士論文.
- 武川順一 (2007) : エレメントフリーガラーキン法による岩石破壊試験の数値シミュレーション, 京都大学大学院工学研究科博士論文.
- Takemiya, H and Bian, X., (2005) : Substructure simulation of inhomogeneous track and layered ground dynamic interaction under train passage, *J. Engrg. Mech. ASCE*, doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:7(699).

- Takemiya, H and Bian, X. C, (2007) : Sinkansen high-speed train induced ground vibrations in view of viaduct-ground interaction *Soil Dynamics and Earthquake Engrg.*, **27**, 506–520.
- 竹宮宏和, 合田和哉, 小森大資 (1999) : 高速列車走行による沿線地盤振動のコンピュータシミュレーション予測, 土木学会論文集, **No.619/I-47**, 193–201.
- 竹宮宏和, 里中修平, 謝偉平 (2001) : 高速移動加振源による軌道-地盤系の動的応答と周辺地盤への振動伝播, 土木学会論文集, **No.682/I-56**, 299–309.
- 田中忠次, 河邑真, 大津宏康, 鵜飼恵三, 阪上最一 (1996) : 地盤の三次元有限要素解析, 丸善株式会社.
- 鉄道総合技術研究所 (1993) : 在来鉄道運転速度向上マニュアル・解説, 運輸省鉄道局監修, 研友社.
- 鉄道総合技術研究所 (1992) : 鉄道構造物設計標準・同解説 (土構造物), 運輸省鉄道局監修, 丸善株式会社.
- Virieux, J. (1986) : *P-SV* wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **51**, 889–901.
- 渡邊英一, 松本勝, 白土博通 (1992) : 構造力学 I, 丸善株式会社.
- Xia, H., Zhang, N. and Cao, Y. M. (2005) : Experimental study of train-induced vibrations of environmental and buildings, *J. Sound Vib.*, **280**, 1017–1029.
- Xia, J., Miller, R. D., Park, C. B. and Tian G. (2002) : Determining *Q* of near-surface materials from Rayleigh waves, *J. Appli. Geophys.*, **51**, 121–129.
- 若月然太郎 (2003) : 粒状体モデルによる弾性波動伝播と破壊現象の数値シミュレーション, 京都大学大学院工学研究科修士論文.
- 安井利尚 (2006) : 個別要素法を用いた溝による地盤振動減衰効果のシミュレーション, 京都大学大学院工学研究科修士論文.
- 吉岡修 (1999) : 新幹線鉄道振動の発生・伝播モデルとその防振対策法への応答, 鉄道総合技術論文誌, 鉄道総研報告, 特別 30 号.
- 吉岡修, 神田仁, 石井啓稔, 加藤政史, 真田佳典, 松岡俊文, 三善孝之 (2006) : 移動荷重による波動場のシミュレーションにおける振源モデリングについての考察 (その 2), 物理探査, **59**, 459–473.

謝辞

本学位論文をまとめるにあたり査読をして頂いた、京都大学大学院社会基盤工学専攻教授の松岡俊文先生、同教授の田村武先生、同教授の朝倉俊弘先生に心から感謝致します。

京都大学名誉教授の芦田譲先生には、研究、プレゼンテーション等、何事にも未熟であった私を時に厳しく、しかし温かさを以って御指導下さったことを心から感謝致します。

京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻地質工学分野教授の松岡俊文先生には、弾性波動シミュレーションを研究するきっかけを与えて頂いたこと、貴重な議論と御指導を賜りましたことを心から感謝致します。

京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻ジオフィジクス分野准教授の三ヶ田均先生には、論文の構成に関する大変有益な多くの御助言を頂きましたことに心から感謝致します。

東海旅客鉄道(株)の吉岡修博士、神田仁博士には、移動振源の基礎理論や、シミュレーション結果に関する解釈において大変重要なご教示、議論を頂きました。また、同社の石井啓稔様、森川昌司様、東基之様、竹上浩史様、地質計測(株)の三塚隆様には、同社技術開発部研究所における研究補助とインターンシップの際は、大変温かくお世話をして下さいましたことに心から感謝致します。

(独)海洋研究開発機構の真田佳典博士、(独)産業技術総合研究所の西澤修博士、応用地質(株)の林宏一博士、名古屋大学大学院環境学研究科付属地震火山・防災研究センター助教授の渡辺俊樹先生、京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻ジオフィジクス分野助教の尾西恭介先生、同専攻地質工学分野助教の辻健先生には、論文執筆やプログラム作成に関する貴重な御助言を頂きましたことを心から感謝致します。

三善孝之先輩、白石和也先輩、武川順一先輩は、博士課程を歩んできた先輩であり、技術だけでなく精神的にも心強く支えて下さりました。そして、希望と情熱に満ちた研究室生活を共有できたジオフィジクス分野の先輩・後輩・同級生の皆様に心から感謝致します。